QUADRATIC
JOURNAL OF INNOVATION AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Vol. 1, No. 1, April 2021, pp. 7-14
Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Aplikasi Pemetaan terkait Semi-Inner Produk pada Ruang Bernorma Real

Aulia Khifah Futhona [1*], Supama [2]
[1] Department of Mathematics, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
[2] Department of Mathematics, Universitas Gadjah Mada
* Corresponding Author. E-mail: aulia.futhona@uin-suka.ac.id

Article History
Received: March 26th, 2021
Revised: April 12th, 2021
Accepted: April 13th, 2021

https://doi.org/10.14421/quadratic.2021.011-02

ABSTRAK

Artikel ini membahas sifat-sifat dari pemetaan terkait semi-inner produk atas $(\cdot,\cdot)_s$ dan semi-inner produk bawah $(\cdot,\cdot)_i$ serta pemetaan terkait semi-inner produk Lumer $[\cdot,\cdot]$ yang membangun suatu norma pada ruang bernorma real. Selanjutnya, pemetaan tersebut diaplikasikan untuk mengkarakterisasi orthogonal Birkhoff dan mengkarakterisasi pendekatan terbaik.

Kata Kunci: Lumer, ortogonal Birkhoff, pendekatan terbaik, semi-inner produk atas dan bawah,

ABSTRACT

In this article, we give the properties of mappings associated with the upper semi-inner product $(\cdot,\cdot)_s$, lower semi-inner product $(\cdot,\cdot)_i$ and Lumer semi-inner product $[\cdot,\cdot]$ which generate the norm on a real normed space. Furthermore, we establish applications to the Birkhoff orthogonality and characterization of best approximants.

Keywords: best approximants, Birkhoff orthogonality, lower and upper semi-inner products, Lumer.

PENDAHULUAN

Penelitian ini merupakan pembahasan lanjutan dari pemetaan-pemetaan terkait semi-inner produk yang sudah terlebih dahulu didefinisikan pada penelitian-penelitian sebelumnya. Tujuan mempelajari sifat pemetaan-pemetaan ini adalah untuk mendapatkan sifat yang dapat diketahui hanya berdasarkan norma pada suatu ruang bernorma, jadi didapatkan sifat-sifat pada ruang bernorma tanpa harus mengetahui inner produk yang membangun norma tersebut. Hasil lain mendefinisikan pemetaan-pemetaan terkait semi-inner produk adalah untuk penyempurnaan ketaksamaan Schwarz yang berkaitan dengan semi-inner produk atas dan bawah, dan juga untuk mengkarakterisasi ortogonal Birkhoff.

Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real. Didefinisikan semi-inner produk atas $(\cdot,\cdot)_s$ dan semi-inner produk bawah $(\cdot,\cdot)_i$ berturut-turut dengan

$$(y,x)_s = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}$$

dan

$$(y,x)_i = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}.$$

Nilai limit tersebut ada untuk setiap $x, y \in X$.

Selain itu, berikut ini diberikan definisi semi-inner produk Lumer.

Definisi 1. Diberikan X ruang vektor real. Pemetaan $[\cdot,\cdot]: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut semi-inner produk Lumer jika memenuhi

(a) $[x,x] \geq 0$ untuk setiap $x \in X$ dan jika $[x,x] = 0$ berakibat $x = 0$.
(b) $[ax + by, z] = a[x,z] + b[y,z]$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x, y, z \in X$.
(c) $[x, ay] = a[x,y]$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dan $x, y, \in X$.
(d) $|[x,y]|^2 \leq [x,x][y,y]$ untuk setiap $x, y, \in X$.

Hubungan antara semi-inner produk atas dan bawah dengan semi-inner produk Lumer yang membangun suatu norma telah disajikan oleh S.S. Dragomir dan J.J. Koliha [1] dalam Lemma berikut.

Lemma 1. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real. Jika $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$, maka

$$(x,y)_i \leq [x,y] \leq (x,y)_s \tag{1}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Pemetaan $\Phi_{x,y}^{[,]}$ $\Phi_{x,y}^{i}$ dan $\Phi_{x,y}^{s}$ beserta Sifatnya

Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer pada X yang membangun norma $\|\cdot\|$. Didefinisikan pemetaan-pemetaan $\Phi_{x,y}^{[,]}, \Phi_{x,y}^{i}, \Phi_{x,y}^{s}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan definisi

$$\Phi_{x,y}^{[,]}(t) = \frac{[y, x+ty]}{\|x+ty\|}, \qquad \Phi_{x,y}^{i}(t) = \frac{(y, x+ty)_i}{\|x+ty\|} \quad \text{dan} \quad \Phi_{x,y}^{s}(t) = \frac{(y, x+ty)_s}{\|x+ty\|}, \tag{2}$$

dengan $x, y \in X$, $x \neq 0$ dan $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$.

Karena $\|x+ty\| > 0$, maka berdasarkan (2) dan mengingat Lemma 1, benar bahwa

$$\Phi_{x,y}^{i}(t) \leq \Phi_{x,y}^{[,]}(t) \leq \Phi_{x,y}^{s}(t), \tag{3}$$

dengan $x, y \in X$, $x \neq 0$ dan $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$.

Sifat-sifat pemetaan di atas telah dibahas oleh S.S. Dragomir dan J.J. Koliha [1] dan dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 1. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$. Jika $x, y \in X$ dengan $x \neq 0$ dan $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$, maka

(i) Untuk setiap $u < 0$ berlaku

$$\Phi_{x,y}^{s}(u) \leq \frac{\|x+uy\| - \|x\|}{u}, \tag{4}$$

dan untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\Phi_{x,y}^{i}(t) \geq \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}. \tag{5}$$

(ii)

$$\lim_{u \to 0^-} \Phi_{x,y}^{[,]}(u) = \frac{(y,x)_i}{\|x\|} \tag{6}$$

dan

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi_{x,y}^{[,]}(t) = \frac{(y,x)_s}{\|x\|} \tag{7}$$

Teorema 2. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$. Jika $x, y \in X$ dengan $x \neq 0$ dan $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$ maka untuk setiap $t, u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dengan $t > 0$ dan $u < 0$ berlaku

$$\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}\|x\| \geq (y,x)_s \tag{8}$$

dan

$$\frac{\|x+uy\| - \|x\|}{u}\|x\| \leq (y,x)_i \tag{9}$$

Oleh karena itu, jika $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$, maka berdasarkan (1), (3), (4), (5), (8), (9), berlaku

$$\begin{aligned} \Phi_{x,y}^{[,]}(t)\|x\| &\geq \Phi_{x,y}^{i}(t)\|x\| \\ &\geq \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}\|x\| \\ &\geq (y,x)_s \geq [y,x] \geq (y,x)_i \\ &\geq \frac{\|x+uy\| - \|x\|}{u}\|x\| \\ &\geq \Phi_{x,y}^{s}(t)\|x\| \\ &\geq \Phi_{x,y}^{[,]}(u)\|x\| \end{aligned} \tag{10}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq 0$ dan $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$ dan untuk setiap $t, u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ dengan $t > 0$ dan $u < 0$.

Karakterisasi Ortogonal Birkhoff

Pada bagian ini akan diberikan definisi ortogonal Birkhoff dan ortogonal relatif terhadap semi-inner produk Lumer beserta sifat-sifatnya. Berikut ini diberikan definisi ortogonal Birkhoff yang juga telah dituliskan oleh D. Alsina [2] .

Definisi 2. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real, dan $G \subseteq X$.

(i) Vektor $x \in X$ dikatakan ortogonal Birkhoff terhadap $y \in X$, dinotasikan $x \perp y(B)$, jika

$\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Vektor $x \in X$ dikatakan ortogonal Birkhoff terhadap G, dinotasikan $x \perp G(B)$, jika $x \perp y(B)$ untuk setiap $y \in G$.

(iii) Himpunan $G^{\perp}(B) = \{x \in X: x \perp G(B)\}$ disebut komplemen ortogonal Birkhoff (*Birkhoff orthogonal complement*) dari G.

Selanjutnya, berikut ini akan dibahas sifat ortogonal yang dibangun oleh inner produk tidak selalu berlaku pada ortogonal Birkhoff. Diperhatikan jika M subruang X maka komplemen ortogonal yang dibangun oleh inner produk juga merupakan subruang X. Akan tetapi, hal ini belum tentu berlaku jika yang dimaksudkan adalah ortogonal Birkhoff. Hal ini dijelaskan pada contoh berikut.

Contoh 1. Diberikan $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ ruang bernorma real dan $M = \text{span}\{(1,0,1)\}$ maka komplemen ortogonal Birkhoff dari M adalah

$$\begin{aligned} M^{\perp}(B) &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2,x_3) \perp M(B)\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2,x_3) \perp (r,0,r)(B) \text{ untuk setiap r} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|(x_1,x_2,x_3)\|_1 \perp \|(x_1,x_2,x_3)+\alpha(r,0,r)\|_1 (B) \text{ untuk setiap } \alpha,\text{r} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|(x_1,x_2,x_3)\|_1 \perp \|(x_1+k,x_2,x_3+k)+\alpha(r,0,r)\|_1 (B) \text{ untuk setiap k} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1|+|x_2|+|x_3| \leq |x_1+k|+|x_2|+|x_3+k| \text{ untuk setiap k} \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Diperhatikan $(-3,-2,5),(4,2,-3) \in \mathbb{R}^3$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|-3|+|-2|+|5| = 10 = |-10| = |-3+k-2-(5+k)| \leq |-3+k|+|-2|+|5+k|$$

dan

$$|4|+|2|+|-3| = 9 = |4+k+2-(-3+k)| \leq |4+k|+|2|+|-3+k|.$$

Artinya $(-3,-2,5),(4,2,-3) \in M^{\perp}(B)$. Akan tetapi, $(-3,-2,5)+(4,2,-3) = (1,0,2) \notin M^{\perp}(B)$ karena terdapat $\lambda = -2$ sehingga $|1|+|0|+|2| = 3 \nleq 1 = |1-2|+|0|+|2-2|$. Dengan kata lain, $M^{\perp}(B)$ bukan merupakan subruang X.

Karakteristik ortogonal Birkhoff dengan semi-inner produk atas dan bawah telah disajikan oleh S.S. Dragomir [3] dalam teorema berikut.

Teorema 3. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $x, y \in X$. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

(i) $x \perp y(B)$

(ii) $(y,x)_i \leq 0 \leq (y,x)_s$ (11)

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi ortogonal Lumer dan akan dicari hubungannya dengan ortogonal Birkhoff yang sudah terlebih dahulu dibahas.

Definisi 3. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real, dan $G \subseteq X$.

(i) Vektor $x \in X$ dikatakan ortogonal Lumer terhadap $y \in X$ relatif terhadap semi-inner produk Lumer $[\cdot,\cdot]$, dinotasikan $x \perp y([\cdot,\cdot])$, jika $[y,x] = 0$.

(ii) Vektor $x \in X$ dikatakan ortogonal Lumer terhadap G relatif terhadap semi-inner produk Lumer $[\cdot,\cdot]$, dinotasikan $x \perp G([\cdot,\cdot])$, jika $x \perp y([\cdot,\cdot])$ untuk setiap $y \in G$.

(iii) Himpunan $G^{\perp}([\cdot,\cdot]) = \{x \in X: x \perp G([\cdot,\cdot])\}$ disebut komplemen ortogonal Lumer (*Lumer orthogonal complement*) dari dari G.

Hubungan antara ortogonal Birkhoff dan ortogonal Lumer telah diberikan oleh Gangadharan N. [4] dalam terema berikut.

Teorema 4. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real, $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ dan $x, y \in X$. Jika $x \perp y([\cdot,\cdot])$ maka $x \perp y(B)$.

Akan tetapi, kebalikan teorema di atas belum tentu benar. Berikut ini diberikan contoh pengingkarnya.

Contoh 2. Diberikan $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ ruang bernorma real dan $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk yang membangun norma $\|\cdot\|_1$ dengan definisi

$$[y,x]=\begin{cases} 0, \text{ jika } x=0 \\ \|x\|_1 \sum\limits_{x_k\neq 0} \dfrac{x_k y_k}{|x_k|}, \text{ jika } x\neq 0 \end{cases},$$

untuk setiap $x,y\in\mathbb{R}^3$.

Dipilih $x=(1,0,0)$ dan $y=(1,1,0)$. Diambil sebarang $\alpha\in\mathbb{R}$, berlaku

$$\|x\|_1=1=|1+\alpha-\alpha|\leq|1+\alpha|+|-\alpha|=|1+\alpha|+|\alpha|=\|x+\alpha y\|_1.$$

Artinya $x\perp y(B)$. Akan tetapi $[y,x]=1\neq 0$, sehingga tidak berlaku $x\perp y([\cdot,\cdot])$.

Oleh karena itu, secara umum ortogonal Birkhoff tidak ekuivalen dengan ortogonal Lumer relatif terhadap setiap semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ pada X. Teorema berikut ini menunjukkan setidaknya ada semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ pada X sehingga ortogonal Birkhoff ekuivalen dengan ortogonal Lumer.

Teorema 5. Diberikan $(X,\|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $x,y\in X$. Jika $x\perp y(B)$ maka terdapat semi-inner produk Lumer $[\cdot,\cdot]$ pada X yang membangun norma $\|\cdot\|$ sehingga $x\perp y([\cdot,\cdot])$.

Berdasarkan Teorema 4 dan Teorema 5, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 1. Diberikan $(X,\|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $x,y\in X$. Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen

(i) $x\perp y(B)$.

(ii) Terdapat semi-inner produk Lumer $[\cdot,\cdot]$ pada X yang membangun norma $\|\cdot\|$ sehingga $x\perp y([\cdot,\cdot])$.

Karakteristik ortogonal Birkhoff sebelumnya juga telah dibicarakan oleh Dragomir dan Koliha [1]. Akan tetapi, berdasarkan definisi dan sifat-sifat pemetaan-pemetaan terkait semi-inner produk, karakteristik ortogonal Birkhoff juga dapat disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 6. Diberikan $(X,\|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $x,y\in X$ dengan $y\neq 0$. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

(i) $x\perp y(B)$.

(ii) Untuk setiap $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ berlaku

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)\leq 0\leq \Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t), \tag{12}$$

untuk setiap $u,t\in\mathbb{R}$ dengan $u<0<t$.

Bukti. (i) $\Rightarrow$ (ii). Jika $x=0$ maka untuk setiap $u,t\in\mathbb{R}$ dengan $u<0<t$ berlaku

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)=\frac{[y,x+uy]}{\|x+uy\|}=\frac{[y,uy]}{\|uy\|}=\frac{u\|y\|^2}{|u|\|y\|}<0$$

dan

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t)=\frac{[y,x+ty]}{\|x+ty\|}=\frac{[y,ty]}{\|ty\|}=\frac{t\|y\|^2}{|t|\|y\|}>0.$$

Jika $x\neq 0$ maka ada dua kemungkinan yaitu $y=kx$ untuk suatu $k\neq 0$ atau $y\neq kx$ untuk setiap $k\neq 0$. Andaikan $y=kx$ untuk suatu $k>0$, maka diperoleh $(y,x)_i=(kx,x)_i=k\|x\|^2>0$. Kontradiksi dengan Teorema 3. Selanjutnya, andaikan $y=kx$ untuk suatu $k<0$, maka diperoleh $(y,x)_s=(kx,x)_s=k\|x\|^2<0$. Kontradiksi dengan Teorema 3. Oleh karena itu, jika $x\neq 0$ maka haruslah $y\neq kx$ untuk setiap $k\neq 0$. Akibatnya, menurut ketaksamaan (10) diperoleh $\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)\|x\|\leq(y,x)_i\leq 0$ dan $\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t)\|x\|\geq(y,x)_s\geq 0$. Hal ini berakibat $\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)\leq 0\leq\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t)$, untuk setiap $u,t\in\mathbb{R}$ dengan $u<0<t$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Jika $x=0$ maka $\|x+ty\|\geq 0=\|x\|$. Jika $x\neq 0$ maka ada dua kemungkinan yaitu $y=kx$ untuk suatu $k\neq 0$ atau $y\neq kx$ untuk setiap $k\neq 0$. Andaikan $y=kx$ untuk suatu $k>0$, maka dapat dipilih $u=-\dfrac{1}{2k}<0$ sehingga

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)=\frac{[y,x+uy]}{\|x+uy\|}=\frac{\left[kx,x-\frac{1}{2k}kx\right]}{\left\|x-\frac{1}{2k}kx\right\|}=\frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\frac{1}{2}\|x\|}>0.$$

Hal ini kontradiksi dengan (12). Andaikan $y=kx$ untuk suatu $k<0$, maka dapat dipilih $t=-\dfrac{1}{2k}>0$ sehingga

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t)=\frac{[y,x+ty]}{\|x+ty\|}=\frac{\left[kx,x-\frac{1}{2k}kx\right]}{\left\|x-\frac{1}{2k}kx\right\|}=\frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\frac{1}{2}\|x\|}<0.$$

Hal ini kontradiksi pula dengan (12). Oleh karena itu, jika $x\neq 0$ maka haruslah $y\neq kx$ untuk setiap $k\neq 0$. Akibatnya, menurut (12) dan (6) diperoleh $0\geq \lim\limits_{u\to 0^-}\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)=\dfrac{(y,x)_i}{\|x\|}$, serta menurut (12) dan (7) diperoleh $0\leq \lim\limits_{t\to 0^+}\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t)=\dfrac{(y,x)_s}{\|x\|}$. Akibatnya, $(y,x)_i\leq 0\leq (y,x)_s$, sehingga menurut Teorema 3 ekuivalen dengan mengatakan $x\perp y(B)$. □

Selanjutnya poin (ii) pada Teorema 6 dapat diganti dengan syarat yang lebih lemah, yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema 7. Diberikan $(X,\|\cdot\|)$ ruang bernorma real dan $x,y\in X$ dengan $y\neq 0$. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

(i) $x\perp y(B)$.

(ii) Terdapat $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ dan $\varepsilon>0$ sehingga

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)\leq 0\leq \Phi_{x,y}^{[\cdot]}(t), \tag{13}$$

untuk setiap $u,t\in\mathbb{R}$ dengan $-\varepsilon<u<0<t<\varepsilon$.

Bukti. (i) $\Rightarrow$ (ii). Akibat langsung dari Teorema 6.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Jika $x=0$ maka $(y,x)_i=0=(y,x)_s$. Jika $x\neq 0$ maka ada dua kemungkinan yaitu $y=kx$ untuk suatu $k\neq 0$ atau $y\neq kx$ untuk setiap $k\neq 0$. Andaikan $y=kx$ untuk suatu $k>0$. Diambil sebarang $\epsilon>0$, maka ada dua kemungkinan yaitu $\varepsilon\geq\frac{1}{k}$ atau $\varepsilon<\frac{1}{k}$. Jika $\varepsilon\geq\frac{1}{k}$, maka dipilih $u=-\frac{1}{2k}$ sehingga $-\varepsilon<u<\varepsilon$ dan

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)=\frac{[y,x+uy]}{\|x+uy\|}=\frac{\left[kx,x-\frac{1}{2k}kx\right]}{\left\|x-\frac{1}{2k}kx\right\|}=\frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\frac{1}{2}\|x\|}>0. \tag{14}$$

Jika $\varepsilon<\frac{1}{k}$, maka dapat dipilih $u=-\frac{1}{2}\varepsilon$ sehingga $-\varepsilon<u<0$ dan

$$\Phi_{x,y}^{[\cdot]}(u)=\frac{[y,x+uy]}{\|x+uy\|}=\frac{\left[kx,x-\frac{1}{2}\varepsilon kx\right]}{\left\|x-\frac{1}{2}\varepsilon kx\right\|}=\frac{k\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon k\right)\|x\|^2}{\left|1-\frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|}\geq\frac{k\left(1-\frac{1}{2k}k\right)\|x\|^2}{\left|1-\frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|}=\frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\left|1-\frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|}>0. \tag{15}$$

Oleh karena itu, (14) maupun (15) kontradiksi dengan (13). Selanjutnya, andaikan $y = kx$ untuk suatu $k < 0$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada dua kemungkinan yaitu $-\varepsilon \leq \frac{1}{k}$ atau $-\varepsilon > \frac{1}{k}$. Jika $-\varepsilon \leq \frac{1}{k}$, maka dapat dipilih $t = -\frac{1}{2k}$ sehingga $0 < t < \varepsilon$ dan

$$\Phi_{x,y}^{[,]}(t) = \frac{[y, x+ty]}{\|x+ty\|} = \frac{\left[kx, x - \frac{1}{2k}kx\right]}{\left\|x - \frac{1}{2k}kx\right\|} = \frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\frac{1}{2}\|x\|} < 0. \tag{16}$$

Jika $-\varepsilon > \frac{1}{k}$, maka dapat dipilih $t = \frac{1}{2}\varepsilon$ sehingga $0 < t < \varepsilon$ dan

$$\Phi_{x,y}^{[,]}(t) = \frac{[y, x+ty]}{\|x+ty\|} = \frac{\left[kx, x + \frac{1}{2}\varepsilon kx\right]}{\left\|x + \frac{1}{2}\varepsilon kx\right\|} = \frac{k\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon k\right)\|x\|^2}{\left|1 + \frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|} \leq \frac{k\left(1 + \frac{1}{2k}k\right)\|x\|^2}{\left|1 + \frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|} = \frac{\frac{1}{2}k\|x\|^2}{\left|1 + \frac{1}{2}\varepsilon k\right|\|x\|} < 0 \cdot \tag{17}$$

Akibatnya, (16) maupun (17) kontradiksi pula dengan (13). Hal ini berakibat jika $x \neq 0$ maka satu-satunya hal yang mungkin adalah $y \neq kx$ untuk setiap $k \neq 0$. Oleh karena itu, menurut (6), (7) dan (13) diperoleh

$$0 \geq \lim_{u \to 0^-} \Phi_{x,y}^{[,]}(u) = \frac{(y,x)_i}{\|x\|} \tag{18}$$

dan

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \Phi_{x,y}^{[,]}(t) = \frac{(y,x)_s}{\|x\|} \tag{19}$$

Berdasarkan (18) dan (19) diperoleh $(y,x)_i \leq 0 \leq (y,x)_s$. Oleh karena itu, menurut Teorema 3 berarti $x \perp y(B)$. □

Salah satu aplikasi dari ortogonal Birkhoff adalah teori pendekatan terbaik (*theory of best approximation*) pada ruang bernorma. Berikut ini diberikan definisi elemen pendekatan terbaik.

Definisi 4. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real, $G \subseteq X$ dan $x \in X$. Elemen $g_0 \in G$ disebut elemen pendekatan terbaik (*element of best approximation*) x dari G jika

$$\|x - g_0\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|.$$

Lebih lanjut, himpunan G disebut himpunan yang mendekati (*approximating set*) dan x disebut titik yang didekati (*approximated point*). Selanjutnya, koleksi semua pendekatan terbaik x dari G dinotasikan sebagai $\mathcal{P}_G(x)$, jadi

$$\mathcal{P}_G(x) = \left\{ g_0 \in G : \|x - g_0\| = \inf_{g \in G} \|x - g\| \right\}.$$

Hasil yang memberikan karakterisasi dari pendekatan terbaik telah dibahas oleh Gangadharan N.[4] dalam teorema berikut.

Teorema 8. Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma real, G subruang X dan $x \in X \setminus \overline{G}$. Jika $g_0 \in G$ maka

$$g_0 \in \mathcal{P}_G(x) \Leftrightarrow x - g_0 \perp G(B).$$

METODE

Untuk menentukan karakterisasi pendekatan terbaik, terlebih dahulu diteliti tentang karakterisasi orthogonal Birkhoff dengan pemetaan-pemetaan terkait semi-inner produk. Selanjutnya, dengan teorema yang telah dibahas pada bagian introduction, dapat diperoleh karakterisasi pendekatan terbaik beserta pembuktiannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Mengingat karakterisasi ortogonal Birkhoff pada pembahasan sebelumnya, diperoleh karakterisasi pendekatan terbaik sebagai berikut.

Teorema 9. Diberikan $(X,\|\cdot\|)$ ruang bernorma real, G subruang X dan $x \in X \setminus \overline{G}$. Jika $g_0 \in G$ maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen.

(i) $g_0 \in \mathcal{P}_G(x)$.

(ii) Untuk setiap $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ berlaku
$$[x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2,$$
untuk setiap $w \in G$.

(iii) Terdapat $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ sehingga
$$[x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2,$$
untuk setiap $w \in G$.

Bukti. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Diketahui $g_0 \in \mathcal{P}_G(x)$, sehingga menurut Teorema 8 ekuivalen dengan $x-g_0 \perp G(B)$, artinya $x-g_0 \perp g(B)$ untuk setiap $g \in G$. Oleh karena itu, menurut Teorema 6, untuk setiap $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ berlaku $\Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(u) \le 0 \le \Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(t)$, untuk setiap $u,t \in \mathbb{R}$ dengan $u<0<t$. Selanjutnya, diperhatikan benar bahwa

$$\Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(u) \le 0 \le \Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(t), \text{ untuk setiap } u<0<t$$

$$\Leftrightarrow \frac{[g, x-g_0+ug]}{\|x-g_0+ug\|} \le 0 \le \frac{[g, x-g_0+tg]}{\|x-g_0+tg\|}, \text{ untuk setiap } u<0<t$$

$$\Leftrightarrow [g, x-g_0+ug] \le 0 \text{ dan } [g, x-g_0+tg] \ge 0, \text{ untuk setiap } u<0<t$$

$$\Leftrightarrow [ug, x-g_0+ug] \ge 0 \text{ dan } [tg, x-g_0+tg] \ge 0, \text{ untuk setiap } u<0<t$$

$$\Leftrightarrow [w, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow [x-g_0+w-x+g_0, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow \|x-g_0+w\|^2 - [x-g_0, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow [x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2, \text{ untuk setiap } w \in G$$

Oleh karena itu, untuk setiap $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ berlaku $[x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2$, untuk setiap $w \in G$. Jadi terbukti (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Diketahui $g_0 \in \mathcal{P}_G(x)$, sehingga menurut Teorema 8 ekuivalen dengan $x-g_0 \perp G(B)$, artinya $x-g_0 \perp g(B)$ untuk setiap $g \in G$. Oleh karena itu, menurut Teorema 7, terdapat $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ dan $\varepsilon > 0$ sehingga $\Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(u) \le 0 \le \Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(t)$, untuk setiap $u, t \in \mathbb{R}$ dengan $-\varepsilon < u < 0 < t < \varepsilon$. Selanjutnya, diperhatikan benar bahwa

$$\Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(u) \le 0 \le \Phi^{[\cdot,\cdot]}_{x-g_0,g}(t), \text{ untuk setiap } -\varepsilon < u < 0 < t < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{[g, x-g_0+ug]}{\|x-g_0+ug\|} \le 0 \le \frac{[g, x-g_0+tg]}{\|x-g_0+tg\|}, \text{ untuk setiap } -\varepsilon < u < 0 < t < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad [g, x-g_0+ug] \le 0 \text{ dan } [g, x-g_0+tg] \ge 0, \text{ untuk setiap } -\varepsilon < u < 0 < t < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad [ug, x-g_0+ug] \ge 0 \text{ dan } [tg, x-g_0+tg] \ge 0, \text{ untuk setiap } -\varepsilon < u < 0 < t < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \quad [w, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow \quad [x-g_0+w-x+g_0, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow \quad \|x-g_0+w\|^2 - [x-g_0, x-g_0+w] \ge 0, \text{ untuk setiap } w \in G$$

$$\Leftrightarrow \quad [x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2, \text{ untuk setiap } w \in G$$

Oleh karena itu, terdapat $[\cdot,\cdot]$ semi-inner produk Lumer yang membangun norma $\|\cdot\|$ sehingga $[x-g_0, x-g_0+w] \le \|x-g_0+w\|^2$, untuk setiap $w \in G$. Jadi terbukti (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

$\square$

SIMPULAN

Karakteristik ortogonal Birkhoff sebelumnya telah dibicarakan oleh Dragomir dan Koliha [1]. Akan tetapi, ortogonal Birkhoff juga dapat dikarakterisasi dengan pemetaan-pemetaan terkait semi-inner produk yang memenuhi kondisi tertentu. Selain itu, sifat karakteristiknya juga dapat diperlemah. Salah satu aplikasi dari orthogonal Birkhoff adalah teori pendekatan terbaik pada ruang bernorma. Dengan karakteristik tersebut, diperoleh pula karakteristik dari teori pendekatan terbaik. Akibatnya, dapat diketahui suatu titik merupakan pendekatan terbaik jika dan hanya jika memenuhi karakteristik tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. S. Dragomir dan J.J. Koliha, "Two mappings related to semi-inner product and their applications in geometry of normed linear spaces," *Applications of Mathematics,* vol. 45, no. 5, pp. 337–355, 2000, doi: https://doi.org/10.1023/A:1022268627299
[2] D. Alsina, C., *Norm Derivatives and Characterization of Inner Product Spaces*, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
[3] S. S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, New York: NY, 2004.
[4] N. Gangadharan, "A Study on Characterization of Best Approximations in Normed Spaces in Terms of Semi-Inner Products," Ph.D. dissertation, Dept. Math, Univ. Calicut, Kerala, June, 2009.