QUADRATIC

Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education
Vol. 1, No. 1, April 2021, pp. xx - xx

Norma-2 non-Archimedean Pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$

B.A. Nurnugroho

Department of Mathematics Education, Universitas Ahmad Dahlan
Corresponding Author E-mail: burhanudin@pmat.uad.ac.id

Article History
Received: xx February 2021
Revised: xx March 2021
Accepted: xx March 2021
http://dx.doi.org/10.22342/xxx.x.x4231.129-144

ABSTRAK

Diberikan $\mathbb{K}$ merupakan lapangan bernilai non-Archimedean. Pada paper ini dikonstruksikan norma-2 non-Archimedean pada ruang barisan $\ell_\infty(\mathbb{K})$. Selanjutnya, dikaji mengenai hubungan antara norma-2 non-Archimedean dan norma non-Archimedean pada ruang tersebut, sehingga diperoleh hubungan antara kelengkapan ruang $\ell_\infty(\mathbb{K})$ terhadap norma-2 non-Archimedean dan norma non-Archimedean.
Kata Kunci:lapangan bernilai non-Archimedean, Norma non-Archimedean, Norma-2 non-Archimedean, Ruang Barisan,

ABSTRACT

Given $\mathbb{K}$ is a non-Archimedean valued field. This paper constructed non-Archimedean 2-norm in the sequence space $\ell_\infty(\mathbb{K})$. Furthermore, it was studied on the relationship between non-Archimedean norm-2 and non-Archimedean norm in the space so that the relationship between the completeness of space $\ell_\infty(\mathbb{K})$ respect to non-Archimedean 2-norm and non-Archimedean norm were obtained.
Keywords: non-Archimedean Valued Field, non-Archimedean Norm, non-Archimedean 2-norm, Sequence Space

PENDAHULUAN

Diberikan sebarang lapangan $\mathbb{K}$. Valusi pada $\mathbb{K}$ didefinisikan sebagai fungsi $|\,.|:\mathbb{K}\to[0,\infty)$, sedemikian sehingga untuk setiap $p,q\in\mathbb{K}$ berlaku: (i) $|p|=0$ jika dan hanya jika $p=0$; (ii) $|pq|=|p|\,|q|$; (iii) $|p+q|\leq|p|+|q|$. Pasangan $(\mathbb{K},|\,.|)$ selanjutnya disebut sebagai lapangan bernilai. Jika valuasinya sudah tertentu, maka cukup ditulis $\mathbb{K}$.

Dapat dimengerti bahwa $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ merupakan lapangan bernilai dengan valuasi berturut-turut adalah nilai mutlak dan modulus. Pada definisi valuasi, jika kondisi (iii) diganti dengan (iii') $|p+q|\leq\max\{|p|,|q|\}$, maka $|\,.|$ disebut valuasi non-Archimedean dan $(\mathbb{K},|\,.|)$ disebut sebagai lapangan bernilai non-Archimedean. Untuk sebarang lapangan $\mathbb{K}$, maka fungsi

$$|x|=\begin{cases}1, & x\neq0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

merupakan valuasi non-Archimedean pada $\mathbb{K}$.

Jika diberikan sebarang bilangan prima p, maka untuk setiap bilangan rasional tak nol x, dapat diketemukan dengan tunggal n_x sedemikian sehingga $x = n_x \frac{a}{b}$ dengan a dan b tidak habis dibagi p. Selanjutnya didefiniskan valuasi *p-adic* pada $\mathbb{Q}$, yaitu

$$|x|_p = p^{-n_x}$$

untuk $x \neq 0$ dan $|0|_p = 0$. Dapat ditunjukkan bahwa $|\ .|_p$ merupakan valuasi non-Archimedean pada $\mathbb{Q}$[1].

Untuk sebarang lapangan bernilai $(\mathbb{K}, |\ .|)$, maka fungsi $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to [0, \infty)$ dengan

$$d(x,y) = |x - y|$$

merupakan metrik pada $\mathbb{K}$. Dengan kata lain $(\mathbb{K}, d)$ merupakan ruang metrik. Lapangan $\mathbb{K}$ dikatakan lengkap jika $\mathbb{K}$ lengkap terhadap metrik tersebut[2]. Sebagain contoh, lapangan $\mathbb{Q}$ lengkap terhadap valuasi *p-adic*.

Penelitian mengenai konsep lapangan bernilai diawali oleh Hasse, Hensel, Krull, Ostrowski, Kaplansky. Namun, penelitian-penelitian tersebut lebih didasarkan dari sudut pandang aljabar. Penelitian secara sistematis mengenai analisis fungsional atas lapangan bernilai di mulai oleh A.F. Monna sejak tahun 1943[3].

Diberikan X ruang vektor atas lapangan bernilai non-Archimedean $\mathbb{K}$. Fungsi $\|\ .\ \| : X \to [0, \infty)$ dikatakan norma non-Archimedean pada X, jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$ berlaku : (i) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$; (ii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$; (iii) $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Pasangan $(X, \|\ .\ \|)$ disebut ruang bernorma non-Archimedean. Jika norma non-Archimedean sudah tertentu, maka cukup ditulis X.

Dalam perkembangannya norma non-Archimedean, dikembangkan menjadi konsep yang lebih luas yaitu norma-2 non-Archimedean[4]. Norma-2 non-Archimedean memiliki struktur yang mirip dengan konsep norma-2, Norma-2 dikembangkan oleh Gahler sekitar tahun 1960-an[5]. Untuk selanjutnya, jika tidak disebutkan secara khusus, maka $\mathbb{K}$ dimaksudkan sebagai lapangan bernilai non-Archimedean

Definisi 1. *Diberikan X ruang linear atas $\mathbb{K}$, berdimensi $d \geq 2$. Norma-2 non-Archimedean pada X merupakan fungsi $\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:*

(N_1) $\|x, y\| = 0$ *jika dan hanya jika x, y saling tak bebas linear,*

(N_2) $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(N_3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{K}$,

(N_4) $\|x + y, z\| \leq \max\{\|x, z\|, \|y, z\|\}, \forall x, y, z \in X$.

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang bernorma-2 non-Archimedean.

Diberikan $\omega(\mathbb{K})$ merupakan himpunan semua barisan dengan nilai di $\mathbb{K}$ dan didefiniskan ruang barisan berikut

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) \quad = \quad \{x = (x_k) \in \omega(\mathbb{K}) : \sup |x_k| < \infty, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

dengan $1 \leq p < \infty$. Jika $\mathbb{K}$ lengkap, maka ruang $c_0(\mathbb{K}), c(\mathbb{K})$, dan $\ell_\infty(\mathbb{K})$ diatas merupakan ruang Banach [6] dengan norma non-Archimedean

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|. \tag{1}$$

Contoh lapangan bernilai non-Archimedean yang lengkap adalah bilangan *p-adic* $\mathbb{Q}_p$ dengan p suatu bilangan prima. Penelitian mengenai ruang barisan dari bilangan *p-adic* yang lebih mendalam dilakukan oleh peneliti O. Tuğ and M. Doğan[7].

Pada [8, 9], telah di bahas mengenai norma-2 pada ruang barisan real terbatas. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, akan dibahas mengenai norma-2 non-Archimedean pada ruang barisan $\ell_\infty(\mathbb{K})$.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Tahapan pertama dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi norma-2 non-archimedean pada ruang ℓ_∞. Selajutnya dikaji mengenai bubungan antara norma-2 non-archimedean dengan norma non-Archimedean pada ruang

HASIL DAN DISKUSI

Dapat dimengerti bahwa, karena $\mathbb{K}$ merupakan lapangan maka dapat dipahami bahwa $\omega(\mathbb{K})$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{K}$. Selanjutnya untuk sebarang $x, y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$, dapat dimengerti bahwa

$$\begin{aligned}\sup_k |\alpha x_k + y_k| &\leq \sup_k \max\{|\alpha||x_k|, |y_k|\} \\ &= \max \sup_k \{|\alpha||x_k|, |y_k|\} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Oleh karenanya $\ell_\infty(\mathbb{K})$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{K}$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $\ell_\infty(\mathbb{K})$ merupakan ruang bernorma-2 non-Archimedean. Namun sebelumnya diberikan lemma berikut.

Lemma 1. *Barisan $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ saling tak bebas linear jika dan hanya jika untuk setiap $k_1 < k_2$ berlaku*

$$\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & y_{k_1} \\ x_{k_2} & y_{k_2}\end{pmatrix} = 0.$$

Bukti. Diambil sebarang $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_\infty$ saling tak bebas linear, diperoleh bahwa $x = \alpha y$, untuk suatu $\alpha \in \mathbb{Q}$. Akibatnya, $x_k = \alpha y_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Oleh karenanya, untuk setiap $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, dengan $k_1 < k_2$, diperoleh $x_{k_1} = \alpha y_{k_1}$ dan $x_{k_2} = \alpha y_{k_2}$, sehingga

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & y_{k_1} \\ x_{k_2} & y_{k_2}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \alpha y_{k_1} & y_{k_1} \\ \alpha y_{k_2} & y_{k_2}\end{pmatrix} \\ &= \alpha y_{k_1} y_{k_2} - \alpha y_{k_2} y_{k_1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sebaliknya, jika untuk setiap $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, dengan $k_1 < k_2$ berlaku

$$\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & y_{k_1} \\ x_{k_2} & y_{k_2}\end{pmatrix} = 0,$$

maka $x_{k_1} y_{k_2} - x_{k_2} y_{k_1} = 0$, untuk setiap bilangan asli $k_1 < k_2$. Akibatnya, jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$, maka $x = 0$, sehingga $x = 0y$. Dengan demikian x, y saling tak bebas linear. Selanjutnya, jika terdapat $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$, maka $y_m = \frac{y_n}{x_n} x_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, terbukti bahwa x, y saling tak bebas linear. □

Teorema 1. *$\ell_\infty(\mathbb{K})$ merupakan bernorma-2 non-Archimdean dengan norma-2 non-Archimedean disefinisikan sebagai*

$$\|x, y\|_\infty = \sup_{k_1, k_2} \left| \det\begin{pmatrix} x_{k_1} & y_{k_1} \\ x_{k_2} & y_{k_2}\end{pmatrix} \right| \tag{2}$$

Bukti. Mengunnakan Lemma 1, dapat ditunjukan bahwa kondisi (N_1) berlaku. Dengan menggunakan sifat valuasi dan determinan,dapat ditunjukan bahwa kondisi (N_2),(N_3) dan (N_4) berlaku. Berikut akan ditunjukan pada bagian (N_4). Diambil sebarang $x = (x_k), (y_k), z = (z_k) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\sup_{k_1,k_2}\left|\det\begin{pmatrix} x_{k_1}+y_{k_1} & z_{k_1} \\ x_{k_2}+y_{k_1} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right| &= \sup_{k_1,k_2}\left|\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & z_{k_1} \\ x_{k_2} & z_{k_2}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_{k_1} & z_{k_1} \\ +y_{k_1} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right| \\ &= \sup_{k_1,k_2}\max\left\{\left|\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & z_{k_1} \\ x_{k_2} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right|, \left|\det\begin{pmatrix} y_{k_1} & z_{k_1} \\ +y_{k_1} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right|\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{k_1,k_2}\left|\det\begin{pmatrix} x_{k_1} & z_{k_1} \\ x_{k_2} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right|, \sup_{k_1,k_2}\left|\det\begin{pmatrix} y_{k_1} & z_{k_1} \\ y_{k_1} & z_{k_2}\end{pmatrix}\right|\right\}.\end{aligned}$$

Terbukti bahwa

$$\|x + y, z\|_\infty \leq \max\{\|x, z\|_\infty, \|y, z\|_\infty\}.$$

□

Teorema 2. *Untuk setiap $x,y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$, berlaku*

$$\|x,y\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \tag{3}$$

Bukti. Untuk setiap $x,y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$, berlaku

$$\begin{aligned}
\|x,y\|_\infty &= \sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}y_{k_2} - x_{k_2}y_{k_1}| \\
&= \sup_{k_1,k_2} \max\{|x_{k_1}y_{k_2}|, |x_{k_2}y_{k_1}|\} \\
&= \sup_{k_1,k_2} \max\{|x_{k_1}||y_{k_2}|, |x_{k_2}||y_{k_1}|\} \\
&= \max\{\sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}||y_{k_2}|, \sup_{k_1,k_2} |x_{k_2}||y_{k_1}|\} \\
&\leq \max\{\sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}||y_{k_2}|\} \\
&= \sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}||y_{k_2}| \\
&= \sup_{k_1} |x_{k_1}| \sup_{k_2} |y_{k_2}| \\
&= \|x\|_\infty \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3. *Jika $(X, \|.,.\|)$ merupakan ruang bernorma-2 non-Archimedean dan $\{a,b\} \subset X$ saling bebas linear, maka dapat dibangun norma non-Archimedean pada X yang besesuaian dengan $\{a,b\}$, yaitu*

$$\|x\|_\infty^* = \sup\{\|x,a\|_\infty, \|x,b\|_\infty\}. \tag{4}$$

Bukti. Diperhatikan bahwa jika $\|x\|_\infty^* = 0$, maka $\|x,a\| = \|x,b\| = 0$. Akibatnya, terdapat $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, sehingga $x = \alpha x$, $x = \beta b$. Oleh karenanya $\alpha a - \beta b = 0$. Karena a dan b saling bebas linear, maka $\alpha = \beta = 0$. Dengan demikian diperoleh $x = 0$. Sebaliknya, jika $x = 0$, maka dapat dimengerti bahwa

$$\|x\|_\infty^* = \sup\{\|0,a\|_\infty, \|0,b\|_\infty\} = 0.$$

Selanjutnya untuk sebarang $x,y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ dan $\alpha \in \mathbb{K}$, berlaku bahwa

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\infty^* &= \sup\{\|\alpha x,a\|_\infty, \|\sup\{\|x,a\|_\infty, \|x,b\|_\infty\}x,b\|_\infty\} \\
&= \sup\{|\alpha|\|x,a\|_\infty, |\alpha|\|x,b\|_\infty\} \\
&= |\alpha| \sup\{\|x,a\|_\infty, \|x,b\|_\infty\} \\
&= |\alpha|\|x\|_\infty^*,
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty^* &= \sup\{\|x+y,a\|_\infty, \|x+y,b\|_\infty\} \\
&\leq \sup\{\max\{\|x,a\|_\infty, \|y,a\|_\infty\}, \max\{\|x,b\|_\infty, \|y,b\|_\infty\}\} \\
&= \max\{\sup\{\|x,a\|_\infty, \|y,a\|_\infty\}, \sup\{\|x,b\|_\infty, \|y,b\|_\infty\}\} \\
&= \max\{\|x\|_\infty^*, \|y\|_\infty^*\}
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $\|.\|_\infty^*$ merupakan norma non-Archimedean pada X. □

Hubungan antara norma non-Archimedean $\|.\|_\infty^*$ dan $\|.\|_\infty$ pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$, dinyatakan pada akibat berikut.

Akibat 1. *Jika $1_\mathbb{K}$ elemen satuan pada $\mathbb{K}$ dan diambil $a = (1_\mathbb{K}, 0, 0, \cdots), b = (0, 1_\mathbb{K}, 0, \cdots) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$, maka norma non-Archimedean yang bersesuain dengan $\{a,b\}$ pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$, memenuhi kondisi*

$$\|.\|_\infty^* = \|.\|_\infty. \tag{5}$$

Bukti. Dapat dimengerti bahwa untuk setiap $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ berlaku

$$\begin{aligned}\|x,a\| &= \sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}a_{k_2} - x_{k_2}a_{k_1}| \\ &= \sup_{k\neq 1} |x_k|\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\|x,b\| &= \sup_{k_1,k_2} |x_{k_1}b_{k_2} - x_{k_2}b_{k_1}| \\ &= \sup_{k\neq 2} |x_k|\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}\|.\|_\infty^* &= \sup\{\|x,a\|, \|x,b\|\} \\ &= \sup\{\sup_{k\neq 1}|x_k|, \sup_{k\neq 2}|x_k|\} \\ &= \|.\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Barisan $x(m)$ di dalam ruang bernorma-2 non-Archimedean $(x, \|.,.\|)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ terhadap norma-2 non-Archimedean jika untuk setiap $y \in X$ berlaku

$$\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, y\| = 0.$$

Lebih lanjut, barisan $x(m)$ dikatakan barisan cauchy terhadap norma-2 non-Archimedean jika untuk setiap $y \in X$ berlaku

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x(m) - x(n), y\| = 0.$$

Berdasarkan Akibat 1, maka dapat diperoleh hubungan mengenai kekonvergenan terhadap norma-2 non-Archimedean dan norma non-Archimedean pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$, sebagai berikut.

Teorema 4. *Barisan $x(m)$ di $\ell_\infty(\mathbb{K})$ konvergen terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$ jika dan hanya jika konvergen terhadap noma non-Archimedean $\|.\|_\infty$.*

Bukti. Misalkan barisan $x(m)$ konvergen ke $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$. Ambil barisan $a = (1_\mathbb{K}, 0, 0, \cdots), b = (0, 1_\mathbb{K}, 0, \cdots) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, a\| &= \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, b\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Akibatya, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x\|_\infty^* &= \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x\|_\infty \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan semikian terbukti bahwa $x(m)$ konvergen terhadap noma non-Archimedean $\|.\|_\infty$ ke $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$.

Sebaliknya, Misalkan barisan $x(m)$ konvergen ke $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ terhadap norma non-Archimedean $\|.\|_\infty$. Akibatnya $\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x\|_\infty = 0$. Akibatnya, untuk serbarang $y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$, berdasarkan Teorema 2, berlaku

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, y\| &\leq \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x\| \lim_{m\to\infty} \|y\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Oleh karenanya, terbukti bahwa $x(m)$ konvergen terhadap noma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$ ke $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$.
□

Selanjutnta, hubungan kondisi Cauchy terhadap norma-2 non-Archimedean dan norma non-Archimedean pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$, dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 5. *Barisan $x(m)$ di $\ell_\infty(\mathbb{K})$ merupakan barisan Cauchy terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$ jika dan hanya jika $x(m)$ merupakan barisan Cauchy terhadap noma non-Archimedean $\|.\|_\infty$.*

Bukti. Bukti serupa dengan pembuktian Teorema 4. $\square$

Berdasarkan Teorema 4 dan 5, dapat ditunjukan sifat kelengkapan $\ell_\infty(\mathbb{K})$ terhadap norma-2 non-Archimedean.

Teorema 6. *Jika $\mathbb{K}$ lengkap, maka $\ell_\infty(\mathbb{K})$ lengkap terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$.*

Bukti. Ambil sebarang barisan Cauchy $x(m)$ terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$ di $\ell_\infty(\mathbb{K})$. Berdasarkan Teorema 5, maka $x(m)$ merupakan barisan Cauchy terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.\|_\infty$. Karena $\ell_\infty(\mathbb{K})$ lengkap terhadap norma non-Archimedean $\|.,\|_\infty$, maka $x(m)$ konvergen ke $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$.Bedasarkan Teorema 4, maka $x(m)$ konvergen ke x terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$. Terbukti bahwa $\ell_\infty(\mathbb{K})$ lengkap terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$. $\square$

KESIMPULAN

Dapat ditunjukan bahwa $\ell_\infty(\mathbb{K})$ merupakan ruang linear. Lebih lanjut, dapat dibentuk norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$ pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$. Dapat diperoleh hubungan antara $\|.,.\|_\infty$ dan $\|.\|_\infty$ yaitu $\|x,y\|_\infty \leq \|x\|_\infty^*\|y\|_\infty$, untuk setiap $x,y \in \ell_\infty(\mathbb{K})$. Dengan membangun norma non-Archimedean $\|.\|_\infty^*$ pada $\ell_\infty(\mathbb{K})$ yang diturunkan dari $\|.,.\|_\infty$, diperoleh bahwa $\|.\|_\infty^* = \|.\|_\infty$. Lebih lanjut, menggunakan fakta-fakta tersebut dapat ditunjukan bahwa $\ell_\infty(\mathbb{K})$ lengkap terhadap norma-2 non-Archimedean $\|.,.\|_\infty$, jika $\mathbb{K}$ lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sadeghi, M. Amyari and Ghadir, ”Isometrics in Non-Archimedean Strictly Convex,” in *NONLINEAR ANALYSIS AND VARIATIONAL PROBLEMS In Honor of George Isac*, T. M. R. a. A. A. K. Panos M. Pardalos, Ed., New York, Springer, 2010, pp. 13-22.

[2] A. V. Rooij, Non-Archimedean functional analysis, New York: M. Dekker, 1978.

[3] J. Uma, An Analysis of Some Difference Sequence Spaces and Their Duals Over Non-Archimedean Fields [thesis] . Kattankulathur: Department Of Mathematics Faculty of Science and Humanities Srm Institute Of Science And Technology, 2018.

[4] J. Choy and S.H. Ku, ”Characterization on 2-Isometries in non-Archimedean 2-normed Spaces,” *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, vol. 22, no. 1, pp 65-71, 2001.

[5] H. Dutta, ”On sequence spaces with elements in a sequence of real linear,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 9, pp.1109–1113, 2010.

[6] P. Natarajan, Sequence Spaces and Summability over Valued Fields, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2020.

[7] O. Tuğ and M. Doğan, ”Review on Some Sequence Spaces of p-adic Numbers,” Eurasian Journal of Science & Engineering, vol. 3, no. 1, pp. 231-237, 2017.

[8] A. Malceski, ”ℓ^∞ as n-normed space,” *Mat. Bilten*, vol. 21, pp. 103-110, 1997.

[9] H. Gunawan, ”The space of p-summable sequences and its natural n-norm,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 64, no. 1, pp. 137-147, 2001.