QUADRATIC
JOURNAL OF INNOVATION AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Vol. 2, No. 1, April 2022, pp. 10 - 24
Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Pemanfaatan skewness dan kurtosis dalam menentukan harga opsi beli asia

Muhamad Rashif Hilmi
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indonesia
rashif.hilmi@uin-suka.ac.id

Devi Nurtiyasari
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, Indonesia
devi.nurtiyasari@uin-suka.ac.id

Angga Syahputra
Institut Agama Islam Negeri Lhokseumawe, Indonesia
anggasyahputra@lhokseumawe.ac.id

Article History
Received: February 10th, 2022
Revised: April 12th, 2022
Accepted: April 14th, 2022

https://doi.org/10.14421/quadratic.2022.021-02

ABSTRAK

Opsi Asia adalah opsi dimana besar perhitungan keuntungannya menggunakan rata-rata harga aset selama periode kontrak. Penentuan harga Opsi Asia yang umum digunakan adalah dengan metode Black-Scholes. Metode Black-Scholes mempunyai beberapa syarat yang harus terpenuhi, salah satunya adalah logaritma dari rata-rata harga aset berdistribusi normal atau nilai *skewness* dan *kurtosis* tidak normal. Dalam aplikasinya, sangat sedikit kasus dimana syarat ini terpenuhi . Salah satu solusi dari permasalahan ini adalah memasukkan nilai *skewness* dan *kurtosis* kedalam model. Model ini menggunakan ekspansi Gram-Charlier untuk menambahkan nilai *skewness* dan *kurtosis* kepada rumus Black-Scholes. Harga Opsi Asia yang diperoleh adalah harga opsi Asia metode Black-Scholes ditambah dengan persamaan yang berhubungan dengan *skewness* dan *kurtosis* yang tidak normal. Dalam studi kasus dilakukan perbandingan harga Opsi Asia metode Black-Scholes dengan ekspansi Gram-Charlier dimana data yang digunakan adalah data simulasi dan diperoleh kesimpulan nilai *skewness* dan *kurtosis* dapat mempengaruhi harga Opsi beli Asia dengan Metode Black-Scholes.

Kata Kunci: *Skewness, Kurtosis, Opsi Asia, Black-Scholes, Polinomial Hermite, Ekspansi Gram-Charlier*.

ABSTRACT

An Asian option is an option where the profit is calculated using the average asset price over the contract period. Asian Option pricing that is most commonly used is the Black-Scholes method. The Black-Scholes method has several conditions, one of them is the logarithm of the average asset prices normally distributed or the value of skewness and kurtosis are not normal. In the application, there is very rarely this condition is met. The solution includes the value of skewness and kurtosis in the model. This model uses the Gram-Charlier expansion to include skewness and kurtosis into the Black-Scholes model. The Asian Option price obtained is the Asian option price using the Black-Scholes method plus the equations related to skewness and kurtosis. In this case study, a comparison of Asian options prices using the Black-Scholes method with the Gram-Charlier expansion. We use simulation data and it is concluded that the value of skewness and kurtosis can affect the price of Call Asian Option using the Black-Scholes method.

Keywords: Skewness, Kurtosis, Asian Option, Black-Scholes, Hermite Polynomials, Gram-Charlier Expansion

PENDAHULUAN

Opsi adalah suatu kontrak atau perjanjian antara dua pihak, pihak pertama adalah sebagai pembeli yang memiliki hak untuk membeli atau menjual kepada pihak kedua terhadap suatu aset tertentu pada harga dan waktu yang telah disepakati. Opsi diminati oleh investor karena dapat mengurangi resiko kerugian dari aset yang dimiliki dan investor dapat menentukan batas kerugian yang diinginkan (Fabozzi, 2003). Berdasarkan haknya, terdapat dua jenis opsi yaitu opsi beli (*call*) dan opsi jual (*put*). Opsi beli adalah opsi yang memberikan hak kepada pembeli opsi untuk membeli sejumlah aset pada harga tertentu dan waktu tertentu, sedangkan opsi jual adalah opsi yang memberikan hak kepada pembeli untuk menjual aset pada waktu tertentu dan harga tertentu. Berdasarkan periode waktu penggunaannya, opsi dikelompokkan menjadi dua, yaitu opsi tipe Amerika dan opsi tipe Eropa. Opsi tipe Amerika adalah opsi yang bisa dipergunakan sebelum waktu jatuh tempo atau pada waktu jatuh tempo. Sedangkan, opsi tipe Eropa adalah opsi yang bisa dipergunakan hanya pada waktu jatuh tempo.

Berdasarkan besarnya keuntungan, terdapat beberapa jenis opsi. Salah satunya adalah Opsi Asia (*Asian Option*). Opsi Asia pertama kali diperkenalkan oleh Ingersoll (Ingersoll, 1987) dan dinamakan Opsi Asia karena pertama kali diperdagangkan di Tokyo, Jepang (Zhang, 2003) Opsi Asia merupakan salah satu jenis opsi yang nilai keuntungannya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dilaksanakan, tetapi juga bergantung pada rata-rata harga-harga aset selama opsi tersebut berlaku (Hsu & Lyuu, 2011). Opsi jenis ini dinilai oleh sebagian pihak sangat menguntungkan, salah satu alasannya karena opsi jenis ini lebih aman dibandingkan dengan opsi vanila (Opsi Eropa dan Amerika) karena pada opsi vanila keuntungannya hanya bergantung pada harga aset ketika opsi tersebut dilaksanakan, sehingga jika terjadi manipulasi harga pada saat mendekati waktu jatuh tempo maka hal tersebut berpengaruh besar terhadap keuntungan yang diperoleh. Sedangkan pada Opsi Asia, walaupun terjadi manipulasi harga aset menjelang waktu jatuh tempo, maka keuntungan yang diperoleh tidak mengalami perubahan sebesar perubahan pada opsi vanila.

Penentuan harga Opsi Asia dapat dihitung dengan dua metode yaitu rataan aritmatik dan rataan geometrik. Pada rataan aritmatik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata aritmatik dari harga aset selama periode kontrak. Pada rataan geometrik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata geometrik dari harga aset selama periode kontrak.

Terdapat beberapa metode dalam menentukan harga Opsi Asia, salah satunya adalah dengan metode Black-Scholes (Wiklund, 2012). Salah satu asumsi dari metode Black-Scholes adalah logaritma dari rata-rata harga aset berdistribusi normal. Dari asumsi yang diberlakukan pada model Black-Scholes, harga Opsi Asia yang dapat dihitung dengan metode ini adalah harga opsi dengan rataan geometrik karena pada rataan geometrik, ketika harga aset berdistribusi lognormal maka rata-rata geometrik juga akan berdistribusi lognormal. Sedangkan pada rataan aritmatik, ketika harga aset berdistribusi lognormal maka rata-rata aritmatika tidak berdistribusi lognormal (Winarti et al., 2017).

Pada aplikasinya, seringkali kita menemukan data dengan nilai log rata-rata harga aset tidak berdistribusi normal dalam arti nilai *skewness* $\neq 0$ dan *kurtosis* $\neq 3$. Currado dan Su telah mengembangkan formula untuk mengatasi hal tersebut yaitu dengan memasukkan nilai *skewness* dan *kurtosis* ke dalam model (Corrado & Su, 1996). Model ini menggunakan ekspansi Gram-Charlier untuk memberikan penyesuaian nilai *skewness* dan *kurtosis* pada rumus Black-Scholes.

METODE

Skewness dan *Kurtosis*

Skewness dikenal sebagai ukuran kemencengan kurva. *Skewness* adalah ukuran untuk mengetahui tingkat kesimetrisan dari suatu distribusi. Berikut adalah karakteristik distribusi berdasarkan nilai *skewness* (Sheskin, 2004) :

- *Skewness* = 0 menunjukkan bahwa plot dari distribusi tersebut akan berbantuk simetris (Ekor bagian kanan dan kiri sama). Rata-rata, median, modus akan bernilai sama.
- *Skewness* positif (*skewness* > 0) menunjukkan bahwa plot dari distribusi tersebut akan condong ke sebelah kiri (Ekor distribusi berada di bagian kanan). Nilai rata-rata akan lebih besar dari median dan lebih besar dari modus.
- *Skewness* negatif (*skewness* < 0) menunjukkan bahwa plot dari distribusi tersebut akan condong ke sebelah kanan (Ekor distribusi berada di bagian kiri). Nilai rata-rata akan lebih kecil dari median dan lebih kecil dari modus.

Kurtosis adalah ukuran untuk mengetahui tingkat keruncingan dari suatu distribusi. Berdasarkan nilai dari *kurtosis*, karakteristik distribusi dapat dibedakan menjadi :

- Leptokurtik, yaitu distribusi yang memiliki puncak yang relatif tinggi (*kurtosis* > 3).
- Platikurtik, yaitu distribusi yang memiliki puncak yang relatif redah / mendatar (*kurtosis* < 3).
- Mesokurtik, yaitu distribusi yang memiliki puncak yang sedang (*kurtosis* = 3).

Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Suatu variabel random X mempunyai rata-rata μ, variansi σ^2, menurut definisinya, rumus dari *skewness* dan *kurtosis* adalah :

$$S(X) = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right) \quad \text{dan} \quad K(X) = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right)$$

Teorema 1. Jika variabel random X dengan rata-rata μ, variansi σ^2, *skewness* $S(X)$, dan *kurtosis* $K(X)$ dilakukan transformasi $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, maka variable random Z tersebut akan mempunyai rata-rata 0, variansi 1, *skewness* $S(X)$ dan *kurtosis* $K(X)$.

Bukti.

$$S(Z) = E\left(\left(\frac{Z-0}{1}\right)^3\right) = E(Z^3) = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right) = S(X)$$

$$K(Z) = E\left(\left(\frac{Z-0}{1}\right)^4\right) = E(Z^4) = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right) = K(X)$$

Proses Harga Aset

Pergerakan harga aset dapat dikatagorikan sebagai proses stokastik karena dipengaruhi oleh variable waktu. Perubahan harga aset dapat dipandang sebagai persamaan diferensial stokastik yang dinyatakan dengan dS pada interval waktu dt sebagai berikut

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW_t \tag{1}$$

dengan μ adalah nilai ekspektasi dari *return* aset atau dikenal dengan *drift* dan σ adalah volatilitas aset (standar deviasi dari *return* aset). W_t merupakan gerak Brown dengan distribusi $N(0,T)$. Dimisalkan $F = \ln S$ yang mana F adalah fungsi dari S dan t, berdasarkan lemma it$\hat{o}$ (Araneda, 2021) fungsi F akan mengikuti proses :

$$dF = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

Apabila perubahan dalam S berada diantara waktu 0 dan T, berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\int_0^T dF = \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \int_0^T \sigma dW_t$$

$$\ln S_T - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T$$

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) \tag{3}$$

Dari persamaan (3), karena W_T adalah gerak brown dengan distribusi $N(0, T)$, diperoleh distribusi bahwa harga aset pada waktu ke-T (S_T)adalah :

$$S_T \sim LN\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right) \quad (4)$$

Opsi Asia

Keuntungan Opsi Asia

Besar keuntungan Opsi Asia dapat dihitung dengan dua metode yaitu rataan aritmatik dan rataan geometrik. Pada rataan aritmatik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata aritmatik dari harga aset selama periode kontrak. Perhitungan besar keuntungan adalah dengan menjumlahkan n harga aset selama periode kontrak dan dibagikan dengan jumlah aset (n). Pada rataan geometrik, besar keuntungan yang ditawarkan dihitung dari rata-rata geometrik dari harga aset selama periode kontrak. Perhitungan besar keuntungan yaitu dengan mengalikan n harga aset selama periode kontrak kemudian diakar pangkat n.

Besar keuntungan Opsi beli Asia adalah

$$\max(G - K, 0) \quad (5)$$

dengan :

$G =$ Rata-rata harga aset selama masa kontrak

$K =$ Harga pelaksanaan (*strike price*)

Dari besar keuntungan pada persamaan (5), diperoleh bahwa Opsi beli Asia akan memberikan keuntungan jika rata-rata harga aset pada waktu pelaksanaan lebih besar daripada harga pelaksanaan. Dalam penilaian intrinsik Opsi beli Asia terdapat beberapa keadaan yang terjadi antara harga aset yaitu (Mooy et al., 2017) :

- Jika rata-rata harga aset selama masa kontrak (G) > harga pelaksanaan (K), maka pembeli opsi beli akan menjalankan opsinya dan akan memperoleh keuntungan sebesar selisih antara rata-rata harga aset dengan harga kontrak. Kondisi ini disebut *in the money*.
- Jika rata-rata harga aset selama masa kontrak (G) = harga pelaksanaan (K), maka pembeli opsi beli tidak memperoleh keuntungan dari opsi tersebut. Pembeli akan memperoleh kerugian sebesar premi (harga) Opsi yang telah diberikan kepada penjual opsi. Kondisi ini disebut *at the money*.
- Jika rata-rata harga aset selama masa kontrak (G) < harga pelaksanaan (K), maka pembeli opsi beli tidak akan menjalankan opsinya dan tidak memperoleh keuntungan opsi tersebut. Pembeli

akan memperoleh kerugian sebesar premi (harga) Opsi yang telah diberikan kepada penjual opsi. Kondisi ini disebut *out of the money*.

Karakteristik Rata-Rata Geometrik Opsi Asia

Dalam interval waktu $[0, T]$, diambil sebanyak n harga aset selama periode tersebut diperoleh rata-rata geometrik harga aset adalah:

$$G = (\prod_{i=1}^{n} S_i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{S_1 S_2 \dots S_n} \tag{6}$$

dimana S_i adalah harga aset pada waktu ke-i dengan $1 \leq i \leq n$.

Jarak waktu setiap harga aset adalah $\Delta t = T/n$. Dengan mengasumsikan harga aset mengikuti Gerak Brown pada persamaan (3), diperoleh harga aset pada waktu ke $i + 1$ adalah

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i\right) \tag{7}$$

dimana $Z_i \sim N(0,1)$. $\prod_{i=1}^{n} S_i$ merupakan bentuk perkalian harga aset pada waktu ke-i, yaitu

$$\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 S_2 \dots S_n = \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^1 \left(\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\right)^2 \left(\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}\right)^3 \dots \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^n (S_0)^n$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} S_i}{(S_0)^n} = \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^1 \left(\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\right)^2 \left(\frac{S_{n-2}}{S_{n-3}}\right)^3 \dots \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^n$$

$$\ln \frac{\prod_{i=1}^{n} S_i}{(S_0)^n} = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) + 2\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\right) + \dots + n\ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \tag{8}$$

Selanjutnya dilakukan subtitusi persamaan (7) ke dalam persamaan (8), sehingga diperoleh persamaan

$$\ln(\prod_{i=1}^{n} S_i) = n \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T(n+1)}{2}\right) + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{n} (i\, Z_{n-i}) \tag{9}$$

Untuk mencari distribusi dari rata-rata geometric harga aset (G), maka cukup dengan mencari distribusi dari logaritma rata-rata geometric $(\ln G)$.

$$\ln G = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n}\left(n \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T(n+1)}{2}\right) + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(i\, Z_{n-i})\right)$$

$$= \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T(n+1)}{2n}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n}\sum_{i=1}^{n}(i\, Z_{n-i}) \tag{10}$$

Karena $Z_{n-i}\ IID \sim N(0,1)$ maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}(i\, Z_{n-i}) \sim N\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \tag{11}$$

Berdasarkan teorema limit pusat, persamaan (10) dan persamaan (11), dan dimisalkan $\hat{\mu} = \frac{1}{2}\sigma^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$, dan $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ diperoleh distribusi dari $\ln G$ adalah

$$\ln G \sim N\left(\ln S_0 + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T, \hat{\sigma}^2 T\right) \tag{12}$$

Fungsi kepadatan peluang dari rata-rata geometri harga aset (G) adalah

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{g\hat{\sigma}\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln g - \left(\ln S_0 + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T\right)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right)^2} & g > 0 \\ 0 & \text{untuk } g \text{ lainnya} \end{cases} \tag{13}$$

Penentuan Harga Opsi Asia Dengan Metode Black-Scholes

Harga opsi merupakan nilai dari harapan (ekspektasi) keuntungan opsi pada waktu jatuh tempo yang terdiskon oleh suku bunga bebas resiko (r). Pada penentuan harga Opsi beli Asia, berdasarkan persamaan (5), besar keuntungan Opsi beli Asia adalah $\max(G - K, 0)$ sehingga dengan jangka waktu opsi adalah T, harga Opsi Beli Asia menggunakan model Black-Scholes adalah :

$$C_{BS} = e^{-rT}E(\max(G - K, 0))$$
$$= e^{-rT}\int_0^\infty \max(g - K, 0)\ f(g)dg$$
$$= e^{-rT}\int_K^\infty (g - K)\ f(g)dg$$

$$= e^{-rT}(\int_K^\infty g\ f(g)dg - K\int_K^\infty f(g)dg \tag{14}$$

Dengan mensubtitusikan fungsi kepadatan peluang dari G di persamaan (13) ke dalam persamaan (14), diperoleh harga Opsi Beli Asia dengan metode Black-Scholes adalah

$$C_{BS} = S_0 e^{(\hat{\mu}-r)T}N(d_1) - K\,e^{-rT}N(d_2) \tag{15}$$

dengan

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\sigma^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$r =$ suku bunga bebas resiko

$\sigma =$ volatilitas *return*

$n =$ banyak harga aset yang digunakan

Polinomial Hermite

Polinomial adalah pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variable dengan suatu koefisien. Diberikan fungi kepadatan peluang dari distribusi normal standar adalah $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$ dengan $-\infty < z < \infty$ dan n adalah orde polynomial, Polinomial Hermite didefinisikan sebagai berikut :

$$H_n(z)\phi(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\phi(z), n = 0,1,2, \dots$$

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Diperoleh 5 polinomial hermite pertama adalah

$$H_0(z) = 1,\ H_1(z) = z,\ H_2(z) = z^2 + 1,\ H_3(z) = z^3 - 3z,\ H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3 \quad (16)$$

Polinomial Hermite adalah orthogonal pada interval $(-\infty, \infty)$ yang artinya memenuhi sifat orthogonal. Sifat orthogonal dari Polinomial Hermite yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z)H_n(z)\phi(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{, jika } m \neq n \\ m! & \text{, jika } m = n \end{cases} \quad (17)$$

Ekspansi Gram-Charlier

Ekspansi *Gram-Charlier* merupakan ekspansi yang sangat kuat untuk memperkirakan densitas aset dasar yang tidak normal pada proses stokastik. Dalam dua dekade terakhir telah diperkenalkan dibidang keuangan untuk model return yang *leptokurtik*, *skewness*, volatilitas kelompok dan sebagainya (Jarrow & Rudd, 1982). Ketika variabel z tidak diketahui fungsi kepadatan peluangnya, namun diyakini mirip dengan distribusi normal, maka dapat dilakukan dengan pendekatan dengan ekspansi Gram-Charlier (Jondeau & Rockinger, 2001).

Polinomial Hermite dapat digunakan untuk mendapatkan perluasan dari fungsi kepadatan peluang dari suatu distribusi dengan menambahkan nilai dari momen yang lebih tinggi. Salah satu keuntungan utama dari polinomial ini adalah fungsi densitas tetap dapat digunakan meskipun data tidak memenuhi memenuhi asumsi. Fungsi densitas ekspansi *Gram-Charlier* adalah :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{n/2} c_n H_n(z)\phi(z) \tag{18}$$

dengan $\phi(z)$ adalah fungsi densitas normal standar, $H_n(z)$ adalah polynomial hermite orde ke-n dan koefisien c_n berasal dari Polynomial Hermite. Jika kedua ruas persamaan (18) dikalikan dengan $H_m(z)$ dengan $m < N$ dan kemudian dilakukan operasi integral dari batas -∞ sampai ∞ dan menggunakan sifat orthogonal Polinomial Hermite diperoleh ekspansi Gram-Charlier sebagai berikut :

$$h(z) = \phi(z)\begin{bmatrix} H_0(z) + \mu_1 H_1(z) + \frac{1}{2!}(\mu_2 - 1)H_2(z) + \frac{1}{3!}(\mu_3 - 3\mu_1)H_3(z) \\ + \frac{1}{4!}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3)H_4(z) + \cdots \end{bmatrix}$$

Ekspansi ini merupakan seri tak hingga. Dalam ekspansi Gram-Charlier, semakin banyak parameter akan menimbulkan masalah multikolinearitas yaitu terdapat hubungan antar parameter. Hal ini dapat berupa hubungan antara momen ke-3 dengan momen ke-5 dan momen ke-4 dengan momen ke-6, sehingga deret dibatasi sampai momen ke-4 (Corrado & Su, 1996). Diperoleh fungsi densitas ekspansi Gram-Charlier sampai deret keempat adalah

$$h(z) = \phi(z)\begin{bmatrix} H_0(z) + \mu_1 H_1(z) + \frac{1}{2!}(\mu_2 - 1)H_2(z) + \\ \frac{1}{3!}(\mu_3 - 3\mu_1)H_3(z) + \frac{1}{4!}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3)H_4(z) \end{bmatrix} \tag{19}$$

Pemanfaatan *Skewness* Dan *Kurtosis* Dalam Menentukan Harga Opsi Beli Asia

Dalam model Black-Scholes, asumsi yang digunakan adalah log rata-rata geometri berdistribusi normal. Namun, dalam aplikasinya sering kali ditemui log rata-rata geometri tidak berdistribusi normal dalam arti nilai *skewness* dan *kurtosis* tidak normal (*skewness* ≠ 0 dan *kurtosis* ≠ 3). Hal ini yang membuat penentuan harga opsi yang kurang akurat jika menggunakan model Black-Scholes. Oleh karena itu, dibutuhkan fungsi densitas baru, misalkan $h(z)$ yang diekspansi dari fungsi densitas normal dimana didalamnya terdapat densitas normal ditambah dengan faktor koreksi berupa unsur *skewness* dan *kurtosis* yang disebut ekspansi Gram-Charlier.

Langkah pertama yang dilakukan adalah melakukan standarisasi dari log rata-rata geometri. Seperti dalam persamaan (12), dimisalkan log rata-rata geometri memiliki mean : $E(\ln G) = m = \ln S_0 + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T$, variansi : $Var(\ln G) = \hat{\sigma}^2 T$, *skewness* : $S(\ln G) = \mu_3$, *kurtosis* : $K(\ln G) = \mu_4$. Selanjutnya dilakukan standarisasi :

$$Z = \frac{\ln G - m}{\hat{\sigma}^2 T} \tag{20}$$

Berdasarkan teorema 1, diperoleh $\mu_1 = E(Z) = 0$, $\mu_2 = Var(Z) = 1$, $\mu_3 = Skew(Z) = Skew(\ln G)$, dan $\mu_4 = Kurt(Z) = Kurt(\ln G)$ dan disubtitusikan kedalam persamaan (19), diperoleh fungsi densitas ekspansi Gram-Charlier untuk variable Z adalah

$$h(z) = \phi(z)\left[1 + \frac{\mu_3}{3!}H_3(z) + \frac{(\mu_4 - 3)}{4!}H_4(z)\right]$$

Harga opsi merupakan nilai dari harapan (ekspektasi) keuntungan opsi pada waktu jatuh tempo yang terdiskon oleh suku bunga bebas resiko (r). Harga Opsi Beli Asia menggunakan ekspansi Gram-Charlier adalah :

$$\begin{aligned} C_{GC} &= e^{-rT} E(\max(G - K, 0)) \\ &= e^{-rT} \int_0^{\infty} \max(g - K, 0)\ h(g)dg \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} (g - K)\ h(g)dg \end{aligned}$$

Subtitusikan persamaan (20) dan $d_2 = \frac{m - \ln K}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$ diperoleh

$$C_{GC} = e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{m + z\hat{\sigma}\sqrt{T}} - K\right) h(z)\, dz$$

$$C_{GC} = C_{BS} + \frac{\mu_3}{3!} e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{m + z\hat{\sigma}\sqrt{T}} - K\right) H_3(z)\phi(z)\, dz$$

$$+ \frac{(\mu_4 - 3)}{4!} e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \left(e^{m + z\hat{\sigma}\sqrt{T}} - K\right) H_4(z)\phi(z)\, dz$$

Diperoleh harga Opsi beli Asia dengan metode ekspansi Gram-Charlier adalah

$$C_{GC} = C_{BS} + \frac{\mu_3}{3!} I_1 + \frac{(\mu_4 - 3)}{4!} I_2 \tag{21}$$

dengan

$C_{BS} = S_0 e^{(\hat{\mu}-r)T} N(d_1) - K\, e^{-rT} N(d_2)$

$I_1 = \hat{\sigma}\sqrt{T} S_0 \left(\phi(d_1)\left(2\hat{\sigma}\sqrt{T} - d_1\right) + \hat{\sigma}^2 T e^{(\hat{\mu}-r)T} N(d_1)\right)$

$I_2 = \hat{\sigma}\sqrt{T} e^{-rT} K\left({d_2}^2 - 1\right)\phi(d_2) + \hat{\sigma}\sqrt{T}\,(I_1)$

$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\sigma^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{n+1}{2n}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$

$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$

$\mu_3 = Skewness$

$\mu_4 = Kurtosis$

$r =$ suku bunga bebas resiko

$\sigma =$ volatilitas return

$n =$ banyak harga aset yang digunakan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskripsi Studi Kasus

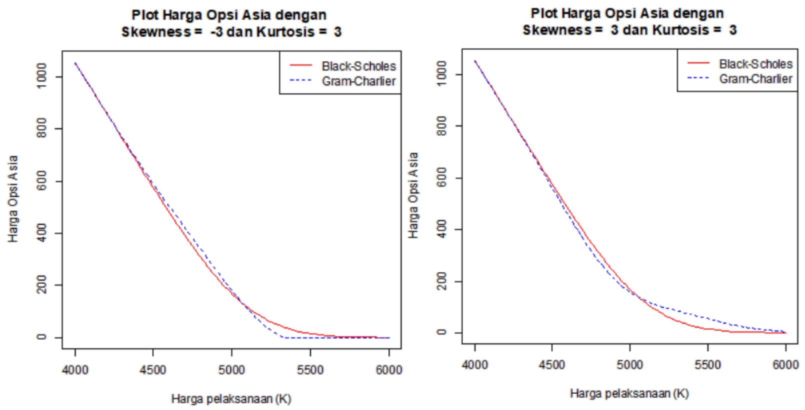
Pada bagian ini, akan dilakukan berbandingan harga Opsi beli Asia menggunakan metode Black-Scholes tanpa *skewness* dan *kurtosis* dengan harga Opsi beli Asia menggunakan metode Black-Scholes menggunakan nilai *skewness* dan *kurtosis*. Perhitungan yang dilakukan adalah perhitungan harga untuk nilai *skewness* dan *kurtosis* yang tidak normal yaitu *skewness* ≠ 0 dan *kurtosis* ≠ 3 selanjutnya akan dilihat pengaruh nilai *skewness* dan *kurtosis* tersebut terhadap harga Opsi beli Asia. Dalam perhitungannya, peneliti menggunakan bantuan perangkat lunak R 4.1.3 dalam menyelesaikan penelitian ini.

Data yang digunakan adalah data simulai dengan rincian harga aset awal $(S_0) = 5.000$, waktu jatuh tempo $(T) = 1$ Tahun, suku bunga $(r) = 3{,}5\%$, volatilitas $(\sigma) = 10\%$, dan banyak harga yang digunakan selama periode kontrak $(n) = 12$. Harga pelaksanaan (K) yang dipakai antara 4.000 sampai 6.000.

Pengaruh *Skewness* terhadap Metode Gram-Charlier

Untuk melihat pengaruh nilai *Skewness* dalam menentukan Harga Opsi Asia, diambil 2 nilai *skewness* yang tidak sama dengan 0 dan *kurtosis* normal (*kurtosis* = 3). Diambil nilai *skewness* =

-3 dan 3. Selanjutnya dilihat plot antara harga pelaksanaan (K) dengan harga Opsi Asia pada gambar 1.



Gambar 1. Plot perbandingan harga Opsi beli Asia dengan 2 nilai *skewness* yang berbeda

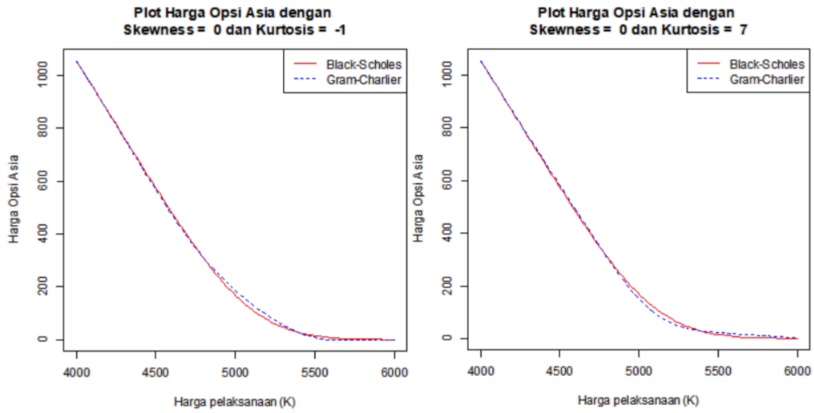
Dari plot diatas diperoleh nilai *skewness* yang tidak normal (*skewness* $\neq 0$) dapat merubah harga Opsi Beli Asia metode Black-Scholes. Untuk harga pelaksanaan (K) kurang dari harga aset awal (S0), nilai *skewness* yang negatif (*skewness* < 0) akan menaikkan harga dari Opsi Beli Asia. Sedangkan nilai *skewness* yang positif (*skewness* > 0) akan menurunkan harga dari Opsi Beli Asia. Sebaliknya, untuk harga pelaksanaan (K) lebih dari harga aset awal (S_0), nilai *skewness* yang negatif (*skewness* < 0) akan menurunkan harga dari Opsi Beli Asia dan nilai *skewness* yang positif (*skewness* > 0) akan menaikkan harga dari Opsi Beli Asia.

Hal ini terjadi karena jika rata-rata harga aset memiliki nilai *skewness* negatif (data lebih condong ke kanan) maka ekor sebelah kiri akan terjadi heavy tail sehingga peluang terjadinya rata-rata harga aset akan turun melebihi return lebih besar, sehingga harga Opsi Beli Asia lebih mahal daripada metode Black-Scholes untuk harga pelaksanaan kecil dan lebih murah untuk harga pelaksanaan besar (lebih dari S_0).

Sedangkan jika rata-rata harga aset memiliki nilai *skewness* negatif (data lebih condong ke kiri) maka ekor sebelah kanan akan terjadi heavy tail sehingga peluang terjadinya rata-rata harga aset akan naik melebihi return lebih besar sehingga harga Opsi Beli Asia lebih murah daripada Black-Scholes untuk harga pelaksanaan kecil dan lebih mahal untuk harga pelaksanaan besar (lebih dari S_0).

Pengaruh *Kurtosis* terhadap Metode Gram-Charlier

Untuk melihat pengaruh nilai *kurtosis* dalam menentukan Harga Opsi Asia, diambil 2 nilai *kurtosis* yang tidak sama dengan 3 yaitu -1 dan 7. Nilai *skewness* yang dipilih adalah *skewness* normal (*skewness* $= 0$). Selanjutnya dilihat plot antara harga pelaksanaan (K) dengan harga Opsi beli Asia pada gambar 2.



Gambar 2. Plot perbandingan harga Opsi beli Asia dengan 2 nilai *kurtosis* yang berbeda

Dari plot diatas diperoleh nilai *kurtosis* yang tidak normal (*kurtosis* ≠ 3) dapat merubah harga Opsi beli Asia. Untuk harga pelaksanaan diantara harga awal aset (S_0), nilai *kurtosis* yang kurang dari 3 (*platikurtik*) akan menaikkan harga Opsi beli Asia dan nilai *kurtosis* yang lebih dari 3 (*leptokurtik*) akan menurunkan harga Opsi beli Asia. Sebaliknya, untuk harga pelaksanaan (K) jauh dari harga aset awal (S0), nilai *kurtosis* yang kurang dari 3 (*platikurtik*) akan menurunkan harga Opsi beli Asia dan nilai *kurtosis* yang lebih dari 3 (*leptokurtik*) akan menaikkan harga Opsi beli Asia.

KESIMPULAN

Penentuan harga Opsi yang popular adalah dengan metode Black-Scholes, termasuk penentuan harga Opsi beli Asia. Banyak literatur yang membahas penentuan harga Opsi dengan metode ini. Salah satu asumsi yang harus terpenuhi dalam metode Black-Scholes adalah logaritma dari rata-rata harga aset berdistribusi normal. Pada aplikasinya, seringkali kita menemukan data dengan nilai log rata-rata harga aset tidak berdistribusi normal dalam arti nilai *skewness* ≠ 0 dan *kurtosis* ≠ 3. Hal ini dapat diatasi dengan memasukkan nilai *skewness* dan *kurtosis* kedalam model. Model ini menggunakan ekspansi Gram-Charlier untuk memberikan penyesuaian nilai *skewness* dan *kurtosis* pada rumus Black-Scholes. Penentuan harga opsi Asia dengan ekspansi Gram-Charlier diperoleh dengan pendekatan polinomial hermite. Harga opsi Asia yang diperoleh adalah harga opsi Asia Black-Scholes ditambah dengan persamaan yang berhubungan dengan *skewness* dan *kurtosis* yang tidak normal.

Untuk harga pelaksanaan (K) kurang dari harga aset awal (S0), semakin besar nilai *skewness* harga Opsi Asia dengan ekspansi Gram-Charlier akan semakin murah dan semakin kecil nilai *skewness* maka harga Opsi Asia dengan metode ekspansi Gram-Charlier akan semakin mahal. Sedangkan untuk harga pelaksanaan (K) lebih dari harga aset awal (S0), semakin besar nilai *skewness* harga Opsi Asia dengan ekspansi Gram-Charlier akan semakin mahal dan semakin kecil nilai *skewness* maka harga Opsi Asia dengan metode ekspansi Gram-Charlier akan semakin murah.

Untuk harga pelaksanaan (K) diantara harga awal aset (S0), semakin besar nilai *kurtosis* harga Opsi Asia dengan ekspansi Gram-Charlier akan semakin murah dan semakin kecil nilai *kurtosis* maka harga Opsi Asia dengan metode ekspansi Gram-Charlier akan semakin mahal. Sedangkan untuk harga pelaksanaan (K) jauh dari harga aset awal (S0), semakin besar nilai *kurtosis* harga Opsi Asia dengan ekspansi Gram-Charlier akan semakin mahal dan semakin kecil nilai *kurtosis* maka harga Opsi Asia dengan metode ekspansi Gram-Charlier akan semakin murah.

REFERENSI

Araneda, A. A. (2021). Price modelling under generalized fractional Brownian motion.

Corrado, C. J., & Su, T. (1996). Skewness and kurtosis in S&P 500 index returns implied by option prices. Journal of Financial Research, 19(2), 175–192. https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.1996.tb00592.x

Fabozzi, F. J. (2003). Financial management and analysis. John Wiley & Sons.

Hsu, W. W. Y., & Lyuu, Y.-D. (2011). Efficient pricing of discrete Asian options. Applied Mathematics and Computation, 217(24), 9875–9894. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.015

Ingersoll, J. E. (1987). Theory of financial decision making. Rowman & Littlefileld.

Jarrow, R., & Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. Journal of Financial Economics, 10(3), 347–369. https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90007-1

Jondeau, E., & Rockinger, M. (2001). Gram–Charlier densities. Journal of Economic Dynamics and Control, 25(10), 1457–1483. https://doi.org/10.1016/S0165-1889(99)00082-2

Mooy, M. N., Rusgiyono, A., & Rahmawati, R. (2017). Penentuan harga opsi put dan call tipe eropa terhadap saham menggunakan model black-scholes. Jurnal Gaussian, 6(3), 407–417.

Sheskin, D. J. (2004). Parametric and nonparametric statistical procedures (third). CRC Press Company.

Wiklund, E. (2012). Asian option pricing and volatility. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-93714

Winarti, Y. G., Noviyanti, L., & Setyanto, G. R. (2017). The European style arithmetic Asian option pricing with stochastic interest rate based on Black Scholes model. AIP Conference Proceedings, 020001. https://doi.org/10.1063/1.4979417

Zhang, J. E. (2003). Pricing continuously sampled Asian options with perturbation method. Journal of Futures Markets, 23(6), 535–560. https://doi.org/10.1002/fut.10073