QUADRATIC
JOURNAL OF INNOVATION AND TECHNOLOGY IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION
Vol. 5, No. 1, April 2025, pp. 1 - 8
Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

Teorema Titik Tetap Kannan Pada Ruang Modular-2

Burhanudin Arif Nurnugroho
Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia
burhanudin@pmat.uad.ac.id

Article History
Received: 2nd April 2024
Revised: 30th April 2024
Accepted: 30th April 2025

http://dx.doi.org/10.14421/quadratic.2025.051-01

ABSTRAK

Pada ruang metrik lengkap (X, d), suatu pemetaan tipe Kannan $T : X \to X$ yaitu yang memenuhi $d(Sx), S(y)) \leq \lambda\left[d\left(x, T(x)\right) + d\left(y, T(y)\right)\right]$ **Error! Bookmark not defined.**untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ terjamin memiliki titik tetap tunggal. Kondisi ini telah berhasil dikembangkan pada beberapa ruang abstrak salah satunya pada ruang bernorma-2. Salah satu pengembangan dari ruang bernorma-2 adalah ruang modular-2. Pada penelitian ini, didiskusikan mengenai pengembangan pemetaan tipe Kannan pada ruang modular-2 yang menjamin adanya titik tetap tunggal.

Kata Kunci: titik tetap, Kannan, modular-2

ABSTRACT

On a complete metric space (X, d), a Kannan-type mapping $T: X \to X$ satisfying $d\left(S(x), S(y)\right) \leq \lambda\left[d\left(x, T(x)\right) + d\left(y, T(y)\right)\right]$ is guaranteed to have a single fixed point. For every $x, y \in X$ with $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ guaranteed to have a single fixed point. This condition has been successfully developed on several abstract spaces, one on a 2-normed space. One of the developments of normed-2 space is 2-modular space. In this paper, we discuss the development of Kannan-type mapping in modular-2 space that guarantees the existence of a single fixed point.

Keywords: Fixed Point, Kannan, 2-modular.

PENDAHULUAN

Ruang bernorma-2 diperkenalkan pertama kali oleh Gähler (1964). White Jr, (1968) mendefinisikan ruang Banach-2, yaitu ruang bernorma-2 yang setiap barisan Cauchy-nya konvergen di dalam X.

Definisi 1. Diberikan X merupakan ruang linear atas lapangan real berdimensi $d \geq 2$. Norma-2 pada X didefinisikan sebagai fungsi $\|.,..\| : X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

(i). $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y saling tak bebas linear,

(ii). $\|x, y\| = \|y, x\|$

(iii). $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$,

(iv). $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$.

Pasangan $(X, \|.,..\|)$ selanjutnya disebut ruang bernorma-2.

Konsep ruang bernorma-2 kemudian dikembangkan menjadi ruang bernorma-n. Konsep norma-n diperkenalkan oleh Misiak (1989). Nourouzi & Shabanian (2009) mengembangkan konsep modular-n yang merupakan perumuman dari norma-n. Padapenelitian Nurnugroho et al., (2017) telah diselidiki beberapa sifat pada ruang modular-2.

Definisi 2. Diberikan X merupakan ruang linear atas lapangan real berdimensi $d \geq 2$. Fungsi $\rho : X \times X \to [0, \infty]$ dikatakan modular-2 jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku:

(i). $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x, y$ saling tak bebas linear.

(ii). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii). $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$,

(iv). $\rho(\alpha x + \beta y, z) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, untuk setiap $x, y \in X, \alpha, \beta \geq 0$, dengan $\alpha + \beta = 1$.

Pasangan (X, ρ) disebut ruang **modular-2**. Jika kondisi (iv) diganti dengan

(iv)'. $\rho(\alpha x + \beta y, z) \leq \alpha\rho(x, z) + \beta\rho(y, z)$, untuk setiap $x, y \in X, \alpha, \beta \geq 0$, dengan $\alpha + \beta = 1$

maka modular-2 ρ dikatakan **konveks.**

Contoh 3. (Nurnugroho et al., 2017)Diberikan $X = \mathbb{R}^2$ dengan modular-2 pada X didefinisikan sebagai

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{abs\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)} \tag{1}$$

Dengan $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definisi 4. (Nurnugroho et al., 2017)Diberikan (X, ρ) ruang modular-2

(i). Barisan (x_n) di dalam X dikatakan konvergen modular-2 (konvergen-ρ) ke $x \in X$, jika

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x, z) = 0$$

untuk setiap $z \in X$.

(ii). Barisan (x_n) di dalam X disebut Cauchy modular-2 (Cauchy-ρ) jika

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m, z) = 0$$

untuk setiap $z \in X$.

(iii). X dikatakan lengkap modular-2 (lengkap-ρ) jika setiap barisan Cauchy-ρ di dalam X konvergen ke suatu titik di X.

(iv). Modular-2 ρ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2, jika terdapat $K > 0$ sehingga berlaku $\rho(2x, y) \leq K\rho(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Modular-2 pada Contoh 3, memenuhi kondisi-Δ_2 dengan $K = \sqrt{2}$.

Akibat 5. Jika modular-2 ρ memenuhi kondisi-Δ_2, maka untuk setiap $\alpha > 0$, terdapat $p \in \mathbb{N}$, sehingga $\rho(\alpha x, y \leq K^p \rho(x, y)$.

L. E. J. Brouwer pada tahun 1912 memperkenalkan Teorema Titik Tetap. Selanjutnya, Banach memperkenalkan teorema titik tetap yang lebih umum pada ruang metrik lengkap yang disebut Teorema Titik Tetap Banach (Sukaesih, 2015). Titik tetap dari pemetaan $T: X \to X$ adalah elemen $x \in X$ sehingga $T(x) = x$.

Jika (X, d) ruang metrik lengkap dan $S: X \to X$ pemetaan kontraktif, artinya terdapat $k \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $d\big(S(x), S(y)\big) \leq kd(x, y)$, maka S memiliki titik tetap tunggal. Kannan (Kannan, 1968; Moradi, 2009) menyatakan bahwa jika (X, d) ruang metrik lengkap dan $S : X \to X$ memenuhi kondisi

$$d\big(S(x), S(y)\big) \leq \lambda\big[d\big(x, T(x)\big) + d\big(y, T(y)\big)\big], \tag{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka T memiliki titik tetap tunggal. Selanjutnya sifat ini kita sebut sebagai Teorema Titik Tetap Kannan.

Banyak penelitian telah meneliti mengenai Teorema Titik Tetap Kannan pada berbagai ruang abstrak antara lain pada ruang metrik-2 fuzzy(Chandra Tripathy et al., 2013), ruang bernorma-2(Kir & Kiziltunc, 2013), dan ruang metrik modular(Kiftiah & Yudhi, 2023). Dengan demikian, Teorema Titik Tetap Kannan berhasil dikembangkan pada ruang bernorma-2. Karena modular-2 merupakan pengembangan dari norma-2, maka pada penelitian ini akan dibahas mengenai pengembangan Teorema Titik Tetap Kannan pada ruang modular-2

METODE

Penelitian ini merupakan studi literatur. Penelitian dilakukan dengan mengkonstruksi teorema titik tetap Kannan pada ruang modular-2.

HASIL DAN DISKUSI

Diskusi diawali dengan membahas himpunan terbatas-ρ dan tertutup-ρ pada ruang modular-2. Definisi himpunan terbatas modular-2 dikonstruksikan mengikuti Nourouzi dan Shabanian (2009) dengan mengambil kejadian khusus saat $n = 2$. Di sisi lain, definisi tertutup modular-2 dikonstruksikan mengikuti konsep tertutup pada ruang modular (Kiftiah, 2013) dan konsep tertutup pada ruang bernorma-2(Rumlawang, 2020).

Definisi 6. Himpunan $K \subset X$ dikatakan terbatas modular-2 (terbatas-ρ), jika terdapat himpunan bebas linear $\{e_1, e_2\} \subset X$, sehingga

$$\sup\{\rho(x - y, e^1) : x, y \in K\} < \infty, \text{ dan}$$

$$\sup\{\rho(x - y, e^2) : x, y \in K\} < \infty.$$

Contoh 7. Diberikan $K = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Jika ρ adalah modular-2 seperti pada Contoh 3 dan diambil himpunan bebas linear $\{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ maka untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in K$, diperoleh:

$$\rho(\bar{x} - \bar{y}, (0,1)) = \sqrt{abs\left(\begin{vmatrix} (x_1 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{|x_1 - y_1|}$$

$$\rho(\bar{x} - \bar{y}, (1,0)) = \sqrt{abs\left(\begin{vmatrix} (x_1 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{|x_2 - y_2|}$$

Dengan demikian

$$\sup\left\{\rho(\bar{x} - \bar{y}, (0,1)) = \sqrt{abs\left(\begin{vmatrix} (x_1 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)} : \bar{x}, \bar{y} \in K\right\} = \sqrt{2}$$

$$\sup\left\{\rho(\bar{x} - \bar{y}, (1,0)) = \sqrt{abs\left(\begin{vmatrix} (x_1 - y_1) & (x_2 - y_2) \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)} : \bar{x}, \bar{y} \in K\right\} = \sqrt{2}$$

Dapat disimpulkan bahwa K terbatas-ρ

Definisi 8. Himpunan $K \subset X$ dikatakan tertutup modular-2 (tertutup-ρ), jika setiap barisan (x_n) di dalam K yang konvergen-ρ ke $x \in X$, maka $x \in K$.

Berikut diberikan teorema titik tetap Kannan pada ruang modular-2.

Teorema 9. Diberikan (X,ρ) merupakan ruang modular-2 lengkap-ρ, dengan ρ memenuhi kondisi-Δ_2 dan himpunan tak kosong $K \subset X$ tertutup-ρ dan terbatas-ρ. Jika $\mathrm{T} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ memenuhi

$$\rho(T(x)-T(y),z) \leq \alpha[\rho(x-T(x),z)+\rho(y-T(y),z)] \tag{3}$$

dengan $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, maka T memiliki titik tetap di K

Bukti. Ambil $x_0 \in K$, selanjutnya dibentuk barisan (x_n) dengan $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1),\ldots,x_n = T(x_{n-1})$. Akibatnya, dapat dinyatakan bahwa

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T^2(x_0),\ldots,x_n = T^n(x_0).$$

Pada barisan (x_n) diperhatikan berlaku:

$$\begin{aligned}\rho(x_n-x_{n+1},z) &= \rho(T(x_{n-1})-T(x_n),z)\\ &\leq \alpha[\rho(x_{n-1}-x_n,z)+\rho(x_n-x_{n+1},z)]\\ &= \alpha[\rho(x_{n-1}-T(x_{n-1}),z)+\rho(x_n-T(x_n),z)]\\ &= \alpha\rho(T(x_{n-2})-T(x_{n-1}),z)+\alpha\rho(x_n-x_{n+1},z)\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh,

$$(1-\alpha)\rho(x_n-x_{n+1},z) \leq \alpha\rho(T(x_{n-2})-T(x_{n-1}),z)$$

$$\rho(x_n-x_{n+1},z) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(T(x_{n-2})-T(x_{n-1}),z)$$

Karena $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$, maka $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} \in [0,1)$. Akibarnya:

$$\begin{aligned}\rho(x_n-x_{n+1},z) &\leq k\rho(x_{n-1}-x_n,z)\\ &\leq k^2\rho(x_{n-2}-x_{n-1},z)\\ &\vdots\\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n\rho(x_0-x_1,z)\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) adalah barisan Cauchy-ρ. Diberikan $m,n \in \mathbb{N}$ dan misalkan $m > n$ dengan $m = n+p$. Karena ρ memenuhi kondisi Δ_2, maka terdapat $K > 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\rho(x_n-x_m,z) &= \rho(x_n-x_{n+p},z)\\ &= \rho\left((x_n-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_{n+2})+\cdots+(x_{n+p-1}-x_{n+p}),z\right)\end{aligned}$$

$$\leq \rho(p(x_n - x_{n+1}), z) + \rho(p(x_{n+1} - x_{n+2}), z) + \cdots + \rho\big(p\big(x_{n+p-1} - x_{n+p}\big), z\big)$$
$$\leq \rho(2^q(x_n - x_{n+1}), z) + \rho(2^q(x_{n+1} - x_{n+2}), z) + \cdots + \rho\big(2^q\big(x_{n+p-1} - x_{n+p}\big), z\big), q \in \mathbb{N}$$
$$\leq K^q[\rho\big((x_n - x_{n+1}), z\big) + \rho\big((x_{n+1} - x_{n+2}), z\big) + \cdots + \rho\left(\left(x_{n+p-1} - x_{n+p}\right), z\right)]$$
$$\leq K^q[k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}]\rho(x_0 - x_1, z)$$
$$\leq K^q[k^n + k^{n+1} + \cdots]\rho(x_0, x_1, z)$$
$$\leq K^q\left[\frac{k^n}{1-k^n}\right]\rho(x_0 - x_1, z)$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k^n} = 0$, maka diperoleh bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x_m, z) = 0$$

Dengan demikan barisan (x_n) barisan Cauchy-ρ. Mengingat X lengkap-ρ dan K tertutup-ρ maka barisan (x_n) konvergen ke $x \in K$, atau

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x, z) = 0$$

Akan ditunjukkan bahwa x merupakan titik tetap dari T.

$$\rho(T(x) - x, z) = \rho\left(\left(\frac{1}{2}\right)\big(2(T(x) - x_n)\big) + \left(\frac{1}{2}\right)\big(2(x_n - x)\big), z\right)$$
$$\leq \rho(2(T(x) - x_n), z) + \rho(2(x_n - x), z)$$
$$\leq K[\rho(T(x) - x_n, z) + \rho(x_n - x, z)]$$
$$= K[\rho(T(x) - T(x_{n-1}), z) + \rho(x_n - x, z)]$$
$$\leq K[\alpha[\rho(x - T(x), z) + \rho(x_{n-1} - T(x_{n-1}), z)] + \rho(x_n - x, z)]$$
$$\leq K[\alpha[\rho(x - T(x), z) + \rho(x_{n-1} - x_n, z)] + \rho(x_n - x, z)]$$
$$\leq K[\alpha[\rho(x - T(x), z) + k^{n-1}\rho(x_0 - x_1, z)] + \rho(x_n - x, z)]$$
$$\leq K\alpha\rho(x - T(x), z) + K\alpha k^{n-1}\rho(x_0 - x_1, z) + K\rho(x_n - x, z)$$

Maka saat diambil $n \to \infty$, diperoleh

$$\rho(T(x) - x, z) \leq K\alpha\rho(x - T(x), z). \tag{4}$$

Karena $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, maka Pertidaksamaan (4) bernilai benar saat $\rho(T(x) - x, z) = 0$. Akibatnya $T(x) = x$, dengan kata lain x marupakan titik tetap T

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap tunggal. Asumsikan $x' \neq x$ merupakan titik tetap T. Oleh karenanya $T(x') = x'$ dan

Print ISSN: 2776-9003, Online ISSN: 2776-8201

$$
\begin{aligned}
\rho(x - x', z) &\leq \rho(T(x) - T(x'), z) \\
&\leq \alpha\big(\rho(x - T(x), z) + \rho(x' - T(x'), z)\big) \\
&= \alpha\big(\rho(0, z) + \rho(0, z)\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $x = x'$. Dapat disimpulkan bahwa T memiliki titik tetap tunggal.

KESIMPULAN

Teorema titik tetap Kannan dapat dikembangkan pada ruang modular-2. Namun karena modular-2 memiliki kondisi yang lebih lemah dari norma-2, maka diperlukan kondisi tambahan agar pengembangan berhasil dilakukan. Kondisi tambahan tersebut adalah bahwa modular-2 ρ haruslah memenuhi kondisi-Δ_2.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kami ucapkan kepada LPPM UAD yang telah mendanai penelitian ini.

REFERENSI

Chandra Tripathy, B., Sudipta, P., & Nanda, R. Das. (2013). Banach's and Kannan's fixed point results in fuzzy 2-metric spaces. *Proyecciones (Antofagasta)*, *32*(4), 359–375.

Gähler, S. (1964). Lineare 2-normierte Räume. *Mathematische Nachrichten*, *28*(1–2), 1–43.

Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.*, *60*, 71–76.

Kiftiah, M. (2013). Fixed Point Theorems for Modular Contraction Mappings on Modulared Spaces. *Int Journal of Math Analysis*, *7*(22), 965–972.

Kiftiah, M., & Yudhi, Y. (2023). Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Kannan dan Chatterjea pada Ruang Metrik Modular Bernilai Kompleks. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika Dan Sains*, *7*(2), 363–373.

Kir, M., & Kiziltunc, H. (2013). *Some new fixed point Theorems in 2-Normed Spaces*. Int. Journal of Math. Analysis.

Misiak, A. (1989). n-inner product spaces. *Mathematische Nachrichten*, *140*(1), 299–319.

Moradi, S. (2009). Kannan fixed-point theorem on complete metric spaces and on generalized metric spaces depended an another function. *ArXiv Preprint ArXiv:0903.1577*.

Nourouzi, K., & Shabanian, S. (2009). Operators defined on n-modular spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *6*, 431–446.

Nurnugroho, B. A., Supama, & Zulijanto, A. (2017). 2-LINEAR OPERATORS ON 2-MODULAR SPACES. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *102*, 3193–3210. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:126369364

Rumlawang, F. Y. (2020). Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces. *Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal*, *1*(1), 41–46.

Sukaesih, E. (2015). Teorema Titik Tetap Banach. *JURNAL ISTEK*, *9*(2).

White Jr, A. G. (1968). *2–BANACH SPACES*. Saint Louis University.